PALATINA

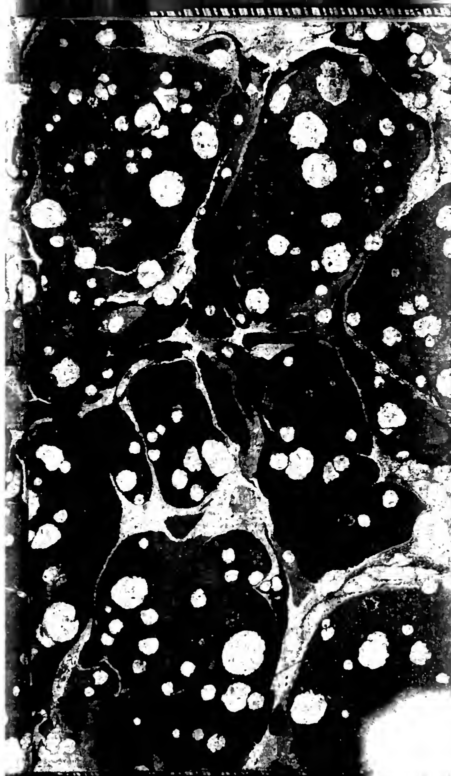
BIBLIOTH
DES
DAMES



ALGEBRE
I

117





BIBLIOTHÈQUE
UNIVERSELLE
DES DAMES.

Septième Classe.

MATHÉMATIQUES.



Il paroît tous les mois deux volumes de cette Bibliothèque. On les délivre soit brochés, soit reliés en veau fauve ou écaillé, & dorés sur tranche, ainsi qu'avec ou sans le nom de chaque Souscripteur imprimé au frontispice de chaque volume.

La souscription pour les 24 vol. reliés est de 72 liv., & de 54 liv. pour les volumes brochés.

Les Souscripteurs de Province, auxquels on ne peut les envoyer par la poste que brochés, payeront de plus 7 liv. 4 s. à cause des frais de poste.

Il faut s'adresser à M. CUCHET, Libraire, *rue & hôtel Serpente, à Paris.*

BIBLIOTHÈQUE
UNIVERSELLE
DES DAMES.
ALGEBRE.
TOME PREMIER.



A PARIS,

RUE ET HÔTEL SERPENTE.

Avec Approbation & Privilége du Roi.

1789.

PRÉFACE.

On dit ordinairement d'un homme qui ne comprend rien à une explication ou à une ſcience, que *c'eſt de l'algebre pour lui.* Faut-il attribuer à cette expreſſion proverbiale l'idée extraordinaire que l'on ſe forme communément de l'*Algebre*, ou plutôt ne doit on pas en accuſer les myſtères dont les inventeurs de cette partie des Mathématiques ſe plûrent à l'envelopper dans les commencemens ? Quelle que ſoit la cauſe de l'eſpèce de répugnance que l'on éprouve & que l'on témoigne ſouvent pour

l'étudier ; il eſt cependant certain qu'elle ne demande qu'une attention ordinaire, & qu'elle récompenſe par des plaiſirs réels ceux qui bravant le préjugé vulgaire lui conſacrent leurs loiſirs.

Nous ignorons ſi les anciens ont connu l'Algebre, on peut au moins ſoupçonner qu'ils avoient quelque moyen ſemblable à l'Analyſe (application de l'Algebre à des quantités déterminées ou ſemi-déterminées) pour réſoudre les queſtions numériques, celles, entr'autres, qui ont été appelées *queſtions de Diophante.* Mais il n'en reſte aucune trace dans leurs écrits. Paſcal eſt arrivé ſans

Analyse & *à force de tête* aux belles découvertes qui composent son *Traité de la Roulette*, imprimé sous le nom d'*Etonville*. Pourquoi n'en auroit-il pas été de même d'Archimède & des anciens ?

Les Arabes inventèrent l'Algebre, ou la découvrirent peut-être dans quelques écrits des anciens qui ne sont pas venus jusqu'à nous. Ils l'apportèrent en Espagne, d'où elle se répandit insensiblement dans toutes les écoles de l'Europe. L'Imprimerie rendit communs & familiers pendant les quinzième & seizième siècles plusieurs Traités sur cette matière ; mais on n'y faisoit usage des lettres alpha-

bétiques & des ſignes que pour indiquer les quantités inconnues; les quantités connues étant toujours déſignées par des nombres. Ce fut un peu avant 1600 qu'un françois, le célèbre Viète, donna à l'Algebre toute l'étendue dont elle pouvoit être ſuſceptible, en déſignant par les lettres alphabétiques toutes les quantités quelconques, connues ou inconnues, déterminées ou ſemi-déterminées. Cette méthode fit changer de face à l'Algebre en rendant les ſolutions des problêmes plus faciles, plus ſimples, & plus générales.

Depuis cette époque, ſi honorable pour notre nation, chaque année

vit faire de nouveaux progrès à l'Algebre. Ce fut encore à un françois, à l'immortel Descartes que cette science dut son application la plus heureuse ; il appliqua l'Analyse aux lignes courbes, & il fournit par ce moyen des méthodes de construction pour les équations supérieures au second degré. On trouvera ces découvertes expliquées en détail dans les savantes *Institutions Analytiques* de l'italienne Marie Agnesi, publiées en 1748. Ces deux volumes *in*-4°. ont mérité les applaudissemens de toute l'Europe. Nous bornons ici notre ambition à rendre les Lecteurs capables d'entendre ces *Institutions*,

auquel notre Traité pourra servir d'introduction.

Nous disons avec reconnoissance que nous avons fait un usage fréquent des Elémens de l'Abbé de la Caille, commentés par M. l'Abbé Marie.

On trouvera peut-être extraordinaire que nous ayons donné une aussi grande étendue à *l'Extraction de la Racine cubique ;* parce qu'elle n'est qu'une application modifiée des principes exposés dans l'*Extraction de la Racine quarrée.* Mais elle est d'un usage si commun pour le *Toisé* des bois, qu'elle devient par-là nécessaire à tous ceux qui font des Ma-

thématiques une application aux affaires & aux détails domeſtiques.

Le deſir de rendre ce Traité d'Algebre facile à étudier *ſans maître*, nous a portés à n'omettre aucune opération, aucun calcul dans la ſolution des problêmes. On ſe contente ordinairement d'indiquer la route à tenir, & de donner le réſultat, en ſupprimant les opérations intermédiaires faciles à imaginer. Pour nous, qui avons ſouvent eu l'occaſion de regretter ces détails ſupprimés, & qui ne voulons rien laiſſer à deſirer pour faciliter l'étude de l'Algebre, nous n'avons rien omis, rien ſuppoſé qui ne puiſſe être

ſuppléé par les Commençans eux-mêmes ſans peine & ſans travail.

OBSERVATIONS

OBSERVATIONS

PRÉLIMINAIRES.

TOUTES les ſciences ont adopté des mots conſacrés à chacune d'elles, & la néceſſité les y a contraintes. Ces mots ont en effet l'avantage réel de remplacer de longues phraſes & des circonlocutions qui rallentiſſent toujours le diſcours, & qui ſouvent le rendent obſcur. Les Mathématiques ont imité en cela les autres ſciences; mais elles employent, outre certains mots particuliers, des ſignes qui leur ſont propres. Avant d'introduire mes lecteurs dans leur ſanctuaire, j'ai cru devoir leur faire connoître le ſens de ces mots, & la valeur des ſignes communs à toutes les parties des Mathématiques. Chacune de ces par-

ties commencera par l'explication des ſignes qu'elles ont ajoutés aux ſignes communs.

Explication des mots propres aux Mathématiques.

La *Définition* explique la nature d'une choſe, ou la ſignification d'un mot.

Le *Corollaire* eſt une propoſition qui ſuit d'une autre: on pourroit l'appeler auſſi *conſéquence.*

Le *Probléme* enſeigne à faire une opération.

Le *Théoréme* eſt une propoſition dont il faut démontrer la vérité, & dont il faut ſe ſervir pour réſoudre quelque *probléme.*

Le *Lemme* eſt une propoſition que l'on démontre pour ſervir de principe ou de baſe à quelque *théoréme.*

Le *Scholie* eſt une remarque particulière faite ſur une propoſition démontrée. On donne auſſi quelquefois ce nom à une récapitulation ſuccincte d'une théorie plus étendue.

Les *Axiomes* ſont des vérités ſi palpables que perſonne ne les conteſte, & que l'on perdroit inutilement du tems en voulant les prouver : telles ſont les propoſitions ſuivantes. *Le tout eſt plus grand qu'une de ſes parties. Deux choſes qui ſont égales à une troiſième, ſont égales entr'elles. Si à des quantités égales on ajoute des quantités égales, ou ſi de quantités égales on retranche des quantités égales, elles reſteront toujours égales. Si deux lignes ou deux figures étant appliquées l'une ſur l'autre ſe couvrent parfaitement, ces*

deux lignes ou ces figures ſont égales en tout.

Explication des ſignes propres aux Mathématiques.

$+$ Ce ſigne s'appelle *plus*, & marque l'addition. Ainſi $4+5$ ſont égaux à 9, & ſe liſent de cette manière, *quatre plus cinq ſont égaux à neuf.*

$-$ Ce ſigne s'appelle *moins*, & marque la ſouſtraction. Ainſi $8-6$ ſont égaux à 2, & ſe liſent de cette manière, *huit moins ſix ſont égaux à deux.*

$=$ Ce ſigne marque l'*égalité.* Ainſi $4+3=7$, s'expriment de la ſorte, *quatre plus trois ſont égaux à ſept.* De même, $a=b$; c'eſt-à-dire, a eſt égal à b.

$>$ $<$ Ces deux ſignes marquent l'*inéga-*

lité entre deux quantités, dont la plus grande eſt toujours placée du côté de l'ouverture, & la plus petite du côté de la pointe. Ainſi $4 > 3$, ſe liſent de cette manière, *le nombre quatre eſt plus grand que trois*. De même, $5 < 9$, ſe liſent de cette manière, *le nombre cinq eſt plus petit que neuf.*

$\times$ Ce ſigne indique la multiplication, & veut dire *multiplié par.* Ainſi $4 \times 3 = 12$, ſe liſent de cette manière, *quatre multiplié par trois eſt égal à douze.* Quelquefois on met un point à la place du ſigne $\times$. Ainſi $4 \times 3 = 4 . 3$.

: Ce ſigne marque la diviſion, & s'exprime ainſi, *diviſé par.* De ſorte que $12 : 3 = 4$, ſe lit de cette manière, *douze diviſé par trois eſt égal à quatre.* Souvent au lieu d'écrire $12 : 3$, on écrit

$\frac{12}{3}$; ce qui veut dire aussi *douze divisé par trois.*

$(2+4)\times 7 = 42$. Ces deux crochets marquent la multiplication de toutes les quantités qu'ils renferment. De sorte que dans ce cas-ci, 7 ne multiplient pas seulement 4, mais $2+4$, ou *6*. Quelques Mathématiciens employent une ligne droite au lieu des crochets ; ils écrivent alors $\overline{2+4}\times 7$; ce qui est la même chose.

$\pm$ On réunit quelquefois les signes $+$ & $-$ de cette manière $\pm$, ou de celle-ci $\mp$. Par exemple, 4 ± 3, & on lit ainsi: *quatre plus ou moins trois.* C'est en consultant l'état de la question, que l'on peut voir celui des deux signes qui correspond au cas particulier dont on est occupé.

BIBLIOTHÈQUE
UNIVERSELLE
DES DAMES.
ALGEBRE.
PREMIÈRE PARTIE.

De l'Algebre proprement dite.

LE grand Newton appelle l'Algebre l'*Arithmétique universelle*. Ce nom fournit la définition exacte de l'Algebre. L'Arithmétique ne traite que de la grandeur exprimée en nombres, c'est-à-dire, que de la grandeur connue, telle que 4 hommes, 4 chevaux, &c. Elle fait desirer une science semblable à elle, qui traite de la grandeur inconnue par elle-même, mais connue en partie par ses rapports avec des quantités connues. Si l'on demande, par exemple, quels

ſont les deux nombres dont la ſomme eſt 20, & dont la différence eſt 2; l'Arithméticien ne pourra les trouver que par des tâtonnemens & par une opération qui ſeroit très-longue, ſi le produit & la différence donnés étoient des nombres très-grands. L'Algebre vient à ſon ſecours, & lui fait trouver les nombres demandés par une opération très-ſimple & applicable à tous les problêmes de même nature.

L'Algebre eſt la ſcience de la grandeur exprimée par des caractères dont la ſignification eſt indéterminée : telles ſont les lettres de l'alphabet qui n'ayant point de ſignification ou de valeur par elles-mêmes, comme les nombres, peuvent repréſenter toutes ſortes de quantités, mouvemens, nombres, &c.

L'Algébriſte voulant répondre à la queſtion propoſée ci-deſſus, appelle x & y les deux nombres demandés. Il traduit enſuite dans ſa langue les propriétés

de ces nombres qui ſont annoncées, c'eſt-à-dire, $x+y=20$; & $x-y=2$. S'il réunit ces deux propriétés en une ſeule, il a $x+y+x-y=20+2$. En effaçant les deux y qui ſe détruiſent, il trouve $x+x=22$. Il conclut de-là que x, ou le premier nombre, eſt 11, moitié de 22. Le ſecond eſt évidemment 9.

Voilà une des queſtions les plus ſimples où l'Algebre trouve ſon application; & elle ſuffit pour en faire ſentir l'utilité.

On eût pu employer pour les opérations algébriques tous autres ſignes que les lettres, mais on les a choiſies à cauſe de l'uſage habituel que nous en faiſons depuis l'enfance. Les premières déſignent ordinairement les quantités connues, & les quatre ou ſix dernières ſont réſervées pour l'expreſſion des quantités inconnues.

N. B. Nous prévenons ici pour tou-

jours nos Lecteurs, que nous n'attacherons aucune valeur, aucune idée particulière de grandeur ou de nombre, aux lettres algébriques dans cette première Partie du Traité d'Algebre. C'est ainsi que certains maîtres enseignent les quatre régles de l'Arithmétique, sans donner aux nombres d'autre valeur, que leur valeur numérique, c'est-à-dire, sans leur faire désigner quelqu'objet particulier, tel que des hommes, des livres, des dettes, des soldats, &c. Ce sera dans la seconde Partie, dans l'*Analyse* proprement dite, que nous donnerons des valeurs à ces lettres, pour résoudre les problêmes algébriques. Cependant, pour satisfaire l'impatience des Lecteurs, à la fin de chaque régle d'Algebre, nous donnerons un exemple de lettres algébriques *signifiantes*.

Les quantités connues sur lesquelles on opère sont de deux sortes, *positives* & *négatives*. Le signe + précède les

premières, & le ſigne — les ſecondes. Celles-ci ne ſont pas moins réelles que les premières, mais elles ſont priſes dans un ſens oppoſé. Par exemple, le bien que l'on poſſéde eſt *poſitif*, & les dettes que l'on a ſont *négatives*. Si Lucas poſſéde 20000ᵗᵗ & qu'il en doive 6000ᵗᵗ, ſon bien $= + 20000^{tt} - 6000^{tt} = 14000^{tt}$. Cet exemple fait voir que les quantités négatives détruiſent les poſitives, & qu'elles ne ſont pas nulles puiſqu'elles produiſent un effet. Elles ſont différentes du zéro, car celui-ci ne produit aucun effet, ni d'addition, ni de ſouſtraction.

Nous ne répéterons pas ici ce que nous avons déjà dit des ſignes $+$, $-$, $\times$, :, &c. nous ferons obſerver ſeulement que les quantités qui ne ſont précédées d'aucun ſigne, ſont (par convention) toujours *poſitives*, & par conſéquent cenſées précédées par le ſigne $+$. Ainſi $a = + a$, $b = + b$; pour

abréger, on est convenu de retrancher le signe des quantités *positives* isolées : mais le signe — n'est jamais sous-entendu.

Pour indiquer l'addition de a avec b, on écrit $a+b$; de même a joint à a s'écrit $a+a$. Mais on a trouvé le moyen de simplifier l'expression $a+a$, en écrivant $2a$; de même $a+a+a=3a$; $ab+ab=2ab$; $abc+abc=2abc$. Il suit de cette manière d'exprimer les quantités algébriques ajoutées, que $a=1a$; puisque $a+a=2a$. Donc en général toute lettre est précédée à sa gauche d'un chiffre exprimé ou sous-entendu qui la fait valoir une, deux, trois.....fois sa valeur primitive : ce chiffre est appelé *coefficient*, à cause de l'*effet* qu'il produit par sa *conjonction* avec la lettre. Cet effet est toujours relatif aux procédés de l'*addition*.

Le coefficient n'est applicable qu'aux

quantités *ſemblables*. On déſigne par le mot *ſemblables* des quantités qui contiennent les mêmes lettres écrites le même nombre de fois, quoique précédées de ſignes différens; ainſi $3a$ & $2a$ ſont des quantités ſemblables, de même $13aa$ & $-6aa$ ſont ſemblables. Lorſqu'il y a pluſieurs lettres dans des quantités ſemblables précédées d'un coefficient, il n'affecte pas chaque lettre en particulier, mais la réunion de toutes les lettres.

$3aa$ & $2aa$ ſont des quantités ſemblables; mais $3a$ & $2aa$ ne ſont pas ſemblables; parce que a eſt écrit une fois dans la première, & deux fois dans la ſeconde. De même $3a$ & $3ab$ ne ſont pas ſemblables, parce que b ne ſe trouve pas dans toutes les deux.

La multiplication de a par b eſt indiquée ordinairement par l'interpoſition du ſigne $\times$, $a \times b$. Mais pour abréger, les Algébriſtes ſont convenus d'écrire à

côté les unes des autres, ſans aucun ſigne, les lettres multipliées; ils écrivent donc ab pour $a \times b$, & abc pour $a \times b \times c$. Deſcartes a imaginé un ſecond moyen de rendre plus ſimples les expreſſions des lettres multipliées, mais qui ne peut convenir qu'aux mêmes lettres. Au lieu d'écrire aa, comme autrefois, il écrit a^2; au lieu de aaa il met a^3; $aaaa = a^4$, $bbb = b^3$, $yy = y^2$, &c. le chiffre (placé à la droite & un peu au-deſſus de la lettre qu'il affecte) eſt appelé *expoſant*, parce qu'il *expoſe* au lecteur le nombre de fois que ſa lettre eſt multipliée par elle-même. On voit par-là que l'expoſant de a eſt 1, mais pour abréger on le ſous-entend toujours. Chaque expoſant n'affecte que la lettre qu'il accompagne, ainſi dans bf^2y^3, l'expoſant 1 ſous-entendu n'affecte que b, celui de f eſt 2, & celui de y eſt 3; de ſorte que ſi l'on ne vouloit pas abréger, on écriroit $bffyyy$.

Il y a une grande différence entre le *coefficient* & l'*exposant* d'une lettre : les Commençans doivent étudier soigneusement cette différence. $2a$ est une quantité bien différente de a^2 ; car si a représente le chiffre 5, $2a = a + a = 5 + 5 = 10$, & $a^2 = aa = a \times a = 5 \times 5 = 25$. Ainsi le coefficient de $2a$ marque la somme de a ajouté à a, & l'exposant de a^2 indique le produit de $a \times a$.

Si l'on a $y + bc - ax$, on appelle *terme* premier y qui est séparé du reste par un signe, second *terme* bc qui est de même séparé du reste par un signe, & troisième *terme* $-ax$. Ainsi le *terme* est une partie d'une quantité, séparée des autres parties par des signes. Lorsque des quantités ne sont pas jointes à d'autres par des signes, on les appelle *monomes* (mot grec qui signifie *terme unique*), telles sont les quantités $5a$, $-bc$, &c. Si deux quantités sont jointes

par le ſigne + ou —, elles forment un *binome* (en grec *double terme*) : $f - d$, $2a + x$; ſi trois..... c'eſt un *trinome* ; ſi quatre... c'eſt un *quatrinome*. En général on appelle *polynome* l'aſſemblage de pluſieurs quantités jointes enſemble par les ſignes + ou —.

PROBLÊME I. *Etant donné un polynome qui contienne des termes ſemblables, faire la réduction ?*

Si les quantités ſemblables ont le même ſigne, ajoutez leurs coefficiens ; ſi elles ont des ſignes différens, ôtez le plus petit coefficient du plus grand, écrivez enſuite la ſomme ou la différence de ces quantités, & la réduction ſera faite. *Par exemple*, dans le trinome $2a + 2d + 5a$, les termes $2a$ & $5a$ étant ſemblables, j'ajoute 2 avec 5, & j'ai la ſomme 7 ; de ſorte que le trinome propoſé ſe réduit à la quantité $7a + 2d$. Si j'avois $a + d + 2a$, j'ajouterois 2 avec 1 (coefficient ſous-entendu

de a), pour avoir $3a+d$. Si j'avois le trinome $2a+d-7a$, je retrancherois 2 de 7, pour avoir $d-5a$. Il eſt viſible que quand les quantités ſemblables ont différens ſignes, & des coefficiens égaux, elles ſe détruiſent : ainſi $2a+d-2a=d$; s'il y avoit pluſieurs quantités ſemblables, les unes *poſitives*, les autres *négatives*, on prendroit la ſomme des coefficiens des poſitives, on feroit la même choſe pour les négatives, l'on retrancheroit la plus petite ſomme de la plus grande, pour écrire le reſte avec le ſigne de la plus grande ſomme. Ainſi, pour faire la réduction des termes ſemblables du quintinome $3a+d-2a-3d+7a$, je prends la ſomme 10 des coefficiens des a poſitifs, de laquelle je retranche 2, coefficient de la quantité négative $=2a$, j'ôte enſuite le coefficient 1 de d du coefficient 3 de $-3d$, & j'ai, toute réduction faite, la quantité $8a-2d$.

En donnant des valeurs au premier exemple de ce problême, & faiſant $a = 3$, $d = 6$, par la ſubſtitution de ces valeurs aux lettres, le trinome $2a + 2d + 5a$ deviendra $2 \times 3 + 2 \times 6 + 5 \times 3$, ou $6 + 12 + 15 = 33$. Par cette même ſubſtitution le trinome réduit $7a + 2d$, deviendra $7 \times 3 + 2 \times 6$, ou $21 + 12 = 33$.

PROBLÊME II. *Ajouter enſemble des quantités algébriques ?*

N. B. Ajouter enſemble pluſieurs quantités, c'eſt les joindre, les prendre à-la-fois avec les ſignes qu'elles ont. Ainſi, ajouter enſemble pluſieurs biens, c'eſt former un bien plus grand; ajouter enſemble pluſieurs dettes, c'eſt former une dette plus grande; ajouter un bien avec une dette, c'eſt former un réſultat qui eſt l'excès du bien ſur la dette, ou de la dette ſur le bien, ſelon que le bien eſt plus grand que la dette, ou que la dette eſt plus grande que le bien.

Il eſt clair par-là qu'en Algebre, *ajouter* ne ſignifie pas toujours *augmenter*. Quand j'ajoute un bien avec un bien, j'augmente le bien ; de même, quand j'ajoute une dette avec une dette, j'augmente la dette. Mais quand je joins un bien avec une dette, je diminue réellement l'une ou l'autre quantité.

1°. *Ajouter enſemble pluſieurs monomes ?*

Ecrivez tous ces monomes les uns à la ſuite des autres, avec les ſignes + & — qu'ils ont. Si dans le réſultat la ſomme des quantités poſitives l'emporte ſur la ſomme des quantités négatives, c'eſt une marque qu'il y a plus de biens que de dettes ; au contraire, il y auroit plus de dettes que de biens, ſi la ſomme des quantités négatives l'emportoit ſur la ſomme des quantités poſitives. Par exemple, qu'il s'agiſſe d'ajouter enſemble les quatre monomes $+a$, $+b$, $-c$, $+d$? On écrira $+a+b-$

$c + d$, ou bien $a + b - c + d$, en sous-entendant le signe $+$ qui commence la phrase.

2°. *Ajouter des monomes avec des polynomes, ou des polynomes avec des polynomes ?*

Il est clair qu'un tout étant égal à la somme de toutes ses parties prises ensemble, on aura la somme demandée, en joignant ensemble tous les termes des grandeurs qu'il faut ajouter, & en les affectant des signes qu'ils ont.

EXEMPLE I. *Ajouter ensemble les trois polynomes :*

$$a + b - c,$$
$$g - h - k,$$
$$m + n - p ?$$

Somme... $a + b - c + g - h - k + m + n - p$.

EXEMPLE II. *Ajouter ensemble les quatre polynomes :*

$$a + b + c - d,$$
$$b - f + g + a,$$
$$c + e - b + g,$$
$$h + c + n - d?$$

Somme.. $a + b + c - d + b - f + g + a + c + e - b + g + h + c + n - d$.

REMARQUE. Lorſque dans la ſomme il ſe trouve des termes *ſemblables*, c'eſt-à-dire, des termes qui contiennent la même lettre avec le même expoſant: alors au lieu d'écrire pluſieurs fois le même terme, on ne l'écrit qu'une ſeule fois, mais on met au-devant un chiffre qui marque combien de fois ce terme doit être répété. Cela s'appelle *faire la réduction de l'addition.* Ainſi, dans l'exemple précédent, au lieu de.... $+ b + a + a$, j'écris $2a$; au lieu de $b - b$, j'écris ſimplement $+ b$; au lieu de $+ c + c + c$, j'écris $3c$; au lieu de $e - d$, j'écris $- 2d$; enfin au lieu de

$+g+g$, j'écris $2g$. Par toutes ces réductions notre somme devient $2a+b+3c-2d-f+2g+e+h+n$.

Nous ne saurions trop répéter, 1°. que le chiffre placé ainsi au-devant d'une quantité, pour marquer combien de fois elle doit être répétée positivement ou négativement, s'appelle *coefficient*. 2°. Que dans le cas où une quantité n'a point de coefficient, elle est censée avoir l'unité pour coefficient. Ainsi g est la même chose que $1g$, ab est la même chose que $1ab$.

Voici encore un exemple d'addition de polynomes avec les réductions.

EXEMPLE III. *Ajouter ensemble les polynomes :*

$$3a-2b+4c-8d,$$
$$-8a+7b-5c+4d,$$
$$3a-4b+6h?$$

Somme, $-2a+b-c-4d+6h$.

Veut-on donner des valeurs aux lettres

du premier exemple de l'addition des polynomes, & rendre $a=2$, $b=3$, $c=4$, $g=5$, $h=6$, $k=7$, $m=8$, $n=9$, $p=10$? Par la substitution, la somme totale $a+b-c+g-h-k+m+n-p$, deviendra $2+3-4+5-6-7+8+9-10$, & par la réduction elle donnera $+27-27$. Cette somme, égale à zéro, prouve que les dettes égalent les biens.

N. B. On peut déjà observer ici ce que l'on verra dans toutes les opérations algébriques, qu'elles ne sont pas des additions, soustractions.....&c. réelles, mais seulement indiquées. Elles deviennent réelles quand on substitue les valeurs aux lettres, & qu'on effectue l'opération indiquée. La somme $a+b$ de l'addition de a, & de b, n'est qu'indiquée; mais $2+3$ peuvent s'ajouter, & devenir $=5$, ce qui est pour lors une addition effectuée.

PROBLÊME III. *Faire la soustraction des quantités algébriques?*

Pour ôter une quantité algébrique d'une autre, il faut changer les signes de la quantité à soustraire, & laisser ceux de la quantité dont on veut soustraire.

Exemple. Pour ôter b ou $+b$ de a, il faut écrire $a-b$: mais pour ôter $-b$ de a, il faut écrire $a+b$. Pour soustraire $+c-d$ de $a+b$, on écrira $a+b-c+d$. Pour soustraire.. $-3aab+2ad$ de $5aab-7ad+3cd$, on écrit $5aab-7ad+3cd+3aab-2ad$.

Lorsqu'après la soustraction il y a des quantités semblables dans le reste, il faut faire la réduction; ainsi dans le dernier exemple qu'on vient de proposer, le reste qu'on a trouvé se réduit à $8aab-9ad+3cd$. Souvent dans la pratique on fait la réduction en même-tems que la soustraction.

On entend facilement pourquoi dans

la quantité à ſouſtraire on change le ſigne de *plus* en *moins* : par exemple, ſi on veut ôter b de a, il eſt évident que le reſte ſera $a - b$. Mais on ne voit pas d'abord pourquoi on change le ſigne de *moins* en *plus* : par exemple, ſi on veut ôter $-b$ de a, & qu'on écrive $a + b$ ſelon la régle preſcrite, il ſemble que l'on aura fait le contraire de ce que l'on ſe propoſoit ; parce que $a + b$ eſt plutôt une ſomme qu'un reſte.

Pour faire comprendre la raiſon de la régle dans le cas où il y a des ſignes de moins dans la quantité à ſouſtraire, nous allons prendre un exemple en nombre. Suppoſons donc qu'il s'agiſſe de ſouſtraire $7 - 3$ de 12 : je dis qu'il faut écrire $12 - 7 + 3$: car ſi on écrit ſimplement $12 - 7$, il eſt évident qu'on à trop ôté de 12, parce qu'on ne veut pas ôter 7 tout entier de 12, mais ſeulement $7 - 3$, ou 7 diminué de 3 ; par conſéquent il faut ajouter au reſte, 3 qu'on

a ôté de trop en mettant $12-7$, c'eſt-à-dire, qu'il faut écrire $12-7+3=8$.

Que s'il s'agit d'ôter une quantité négative toute ſeule, il eſt encore évident qu'il faut changer le ſigne de *moins* en *plus* ; par exemple, ſi on veut ſouſtraire $-b$ de a, il faut écrire $a+b$. Car ôter une quantité négative, c'eſt en ajouter une poſitive ; comme ſi un homme devant cent écus, on lui *ôte*, c'eſt-à-dire, qu'on lui remette cette dette, qui eſt une quantité négative, c'eſt la même choſe que ſi on lui donnoit cent écus ; par conſéquent afin de faire la ſouſtraction il faut changer les ſignes de la quantité à ſouſtraire, en mettant *moins* à la place de *plus*, & *plus* à la place de *moins*.

On vient de dire que pour ſouſtraire $b-c$ de a, il faut écrire $a-b+c$.

L'opération & la preuve de la ſouſtraction des nombres vont nous en convaincre :

Quantité dont il faut souſtraire....................	a
Quantité qu'il faut souſtraire....................	$b-c$
Reſte, ou *différence*.....	$a-b+c$

Preuve par l'addition de la quantité à souſtraire avec le reſte..... } $b-c+a-b+c$ *Réduction*...a

Le reſte $a-b+c$ n'eſt qu'un reſte indiqué. Pour l'effectuer, il faut d'abord ſubſtituer les valeurs des lettres, $a=12$, $b=12$, $c=2$. Par la ſubſtitution le reſte devient $12-12+2$. On peut effectuer ce reſte par la réduction, & il devient $=2$.

PROBLÊME IV. *Multiplier des quantités algébriques ?*

Les quantités algébriques ſont compoſées ordinairement de quatre caractères différens, des ſignes, des coeffi-

ciens, des lettres & des expoſans. Celui qui multiplie doit opérer ſur ces quatre eſpèces de caractères. En voici la manière :

1°. Pour multiplier une ou pluſieurs lettres, par une ou pluſieurs autres, on eſt convenu de les écrire les unes à côté des autres ſans mettre de ſignes entre elles. Ainſi $a \times b$ s'écrit ab, $ab \times c$ s'écrit abc, $abc \times df$ s'écrit $abcdf$, $ab \times ab$ s'écrit $aabb$, & par la réduction des expoſans $aabb$ devient a^2b^2. Cette manière de multiplier les lettres eſt une ſimple convention, & l'on auroit pu en adopter une autre.

2°. L'on multiplie entr'eux les coefficiens ; $2a \times 2b = 4ab$; $6c \times 3d = 18cd$; $3b \times m = 3b \times 1m = 3b \times m$ (car une lettre eſt toujours précédée d'un coefficient exprimé ou ſous-entendu ; & le coefficient ſous-entendu pour abréger eſt toujours l'unité.) $= 3bm$.

Cette regle tient à la nature des coef-

ficiens qui sont des nombres, & qui en cette qualité doivent suivre la régle de la multiplication des nombres. D'ailleurs on sait que $2a = 1a + 1a$; ainsi $2a \times b$ pourroit s'écrire $1a \times 1b + 1a \times 1b = 1ab + 1ab$, c'est-à-dire, 2 fois $1ab$ ou $2 \times 1ab = 2ab$.

3°. On ajoute les exposans des mêmes lettres; ainsi $a^2 \times a^3 = a^5$, $a^2b^3 \times a^3b^4 = a^5b^7$. Pour démontrer cette régle, il faut rappeller d'abord que les *exposans* sont des nombres placés à la gauche & au-dessus des lettres pour exprimer combien de fois ces lettres sont multipliées par elles-mêmes, par exemple $aa = a^2$. Si donc on a $a^2 \times a^3$, on peut écrire $aa \times aaa = aaaaa = a^5$; mais l'exposant 5 est égal à la somme des exposans $2 + 3$ des deux facteurs de la multiplication; il faut donc ajouter dans la multiplication les exposans des mêmes lettres. De même $ab^3 \times f^2 = ab^3f^2$; mais $a \times a^3b = a^{1+3}b = a^4b$,

car l'exposant de a est l'unité sous-entendue pour abréger.

4°. J'ai réservé pour la dernière la régle des signes, parce qu'elle demande plus de réflexion pour être bien comprise. La voici, $+\times+=+$, $+\times-=-$, $-\times+=-$, & $-\times-=+$. Ainsi $a\times b=ab$, c'est-à-dire, $+a\times+b=+ab$, $a\times-b=-ab$, $-a\times+b=-ab$, & $-a\times-b=+ab$.

Pour la prouver, on peut dire, 1°. qu'un facteur positif multiplié par un facteur positif, doit donner un produit de même nature que les facteurs, c'est-à dire, positif; ainsi $+\times+=+$. 2°. Si dans la précédente opération ($+\times+=+$) on change en négatif le second facteur positif, le produit changera de nature, c'est-à-dire, que de positif il deviendra négatif; de-là vient que $+\times-=-$.

3°. Si dans la précédente opération ($+\times-=-$)

($+ \times - = -$) on change en négatif le facteur positif, le produit doit changer de nature, c'est-à-dire, de négatif devenir positif; de-là vient $- \times - = +$. 4°. Enfin, si dans la précédente opération ($- \times - = +$) on change en positif le second facteur négatif, le produit changera de nature, c'est-à-dire, que de positif il deviendra négatif; delà il suit que $- \times + = -$.

Comme la régle des signes demande à être conçue très-clairement, en voici une seconde démonstration de d'Alembert. 1°. $+3 \times +4$ doit donner $+12$; car le multiplicateur $+4$ (qui est toujours ici le second facteur) étant affecté du signe $+$, montre qu'il faut prendre la quantité $+3$ positive autant de fois qu'il est marqué par 4, c'est-à-dire, qu'il faut la prendre 4 fois telle qu'elle est: or 4 fois $+3 = +3 +3 +3 +3 = +12$; ainsi, $+ \times + = +$. 2°. $+3 \times -4 = -12$. Remarquez que le multiplicateur 4 étant

affecté du signe —, fait connoître qu'il faut retrancher, ou rendre négative la grandeur $+3$ quatre fois; on écrira donc $-3-3-3-3=-12$. On voit donc pourquoi $+\times-=-$. 3°. $-3\times+4=-12$; car le multiplicateur 4 étant positif, signifie qu'il faut prendre -3 quatre fois, & par conséquent écrire $-3-3-3-3=-12$; ainsi, $-\times+=-$. 4°. $-3\times-4=+12$. On doit toujours se régler sur le signe du multiplicateur; son signe étant négatif, le multiplicateur -4 indique qu'il faut retrancher -3 quatre fois: or, pour ôter —, on écrit +. Donc pour ôter -3 quatre fois, on écrira $+3+3+3+3=+12$.

Ainsi, on peut établir une régle générale très-simple pour la multiplication des signes. *Toutes les fois que les quantités, qui se multiplient, ont le même signe, on écrira + au produit* (puisque $+\times+=+$, & que $-\times-$

$= +$) ; *mais on écrira* $-$, *quand elles auront des signes différens ;* car $+ \times - = -$, & $- \times + = -$, ainſi qu'on l'a démontré ci-deſſus.

Nous venons de donner les régles de la *multiplication* par rapport aux monomes, c'eſt-à-dire, aux quantités algébriques qui n'ont qu'un terme ; quant aux polynomes, c'eſt-à-dire, aux quantités algébriques qui ont pluſieurs termes ; il faut multiplier, comme dans l'Arithmétique, tous les termes du multiplicande par chaque terme du multiplicateur ; on cherche enſuite la ſomme de tous ces différens produits, en réduiſant les quantités ſemblables, s'il y en a.

EXEMPLE I.

$$
\begin{array}{l}
aa - 2ac + cc \\
\times \\
a - c \\
\hline
a^3 - 2a^2c + ac^2 \\
\quad - a^2c + 2ac^2 - c^3 \\
\hline
a^3 - 3a^2c + 3ac^2 - c^3 \ldots \text{prod. total.}
\end{array}
$$

Pour multiplier $aa - 2ac + cc$ par $a - c$, on écrira le multiplicateur $a - c$ ſous le multiplicande $aa - 2ac + cc$, comme on le voit dans l'exemple ; & tirant une ligne, on dira $aa \times a = a^3$, on écrira a^3 en ſupprimant le ſigne $+$. Enſuite on multipliera le terme $-2ac$ par a, en diſant $- \times + = - : 2ac \times a = 2a^2c$: on écrira donc $-2a^2c$ à la ſuite de a^3. On continuera de multiplier $+cc$ par a, afin d'avoir $+ac^2$, que l'on mettra à la ſuite de $-2a^2c$ ſous la ligne. Et ſi le multiplicande contenoit un plus grand nombre de termes, on ne finiroit pas de multiplier par a, à moins que tous les termes du multiplicande n'euſſent été multipliés par ce premier terme du multiplicateur. Quand le premier terme du multiplicateur a fait ſon office, on fait agir de même le ſecond terme $-c$ ſur tous les termes du multiplicande ; ainſi l'on dira $aa \times - c = -a^2c$, que l'on écrira ainſi qu'il

eſt marqué dans l'exemple. On multipliera enſuite $-2ac$ par $-c$, en diſant $- \times - = +$: $2ac \times c = 2ac^2$: le produit de $-2ac$ par $-c$ eſt donc $+2ac^2$; enfin $+cc \times -c = -c^3$. Tous les termes du multiplicande ayant été multipliés par chaque terme du multiplicateur, on tirera une ligne ſous les produits qui en ſont venus ; & faiſant la réduction de ces produits, on trouvera que le produit total eſt $a^3 - 3a^2c + 3ac^2 - c^3$.

On voit par cet exemple, qu'on ne multiplie jamais qu'un monome par un monome ; ainſi la multiplication des polynomes eſt plus longue, mais elle n'eſt pas différente de celle des monomes.

EXEMPLE II. *Soit propoſé de multiplier* $3a^2x + 2p$ *par* $a - 2x$.

$$\begin{array}{l} 3a^2x + 2p \\ a \quad - 2x \\ \hline 3a^3x + 2ap - 6a^2x^2 - 4px \end{array}$$

Ayant écrit le multiplicateur au-dessous du multiplicande, je multiplie le premier terme $3a^2x$ du multiplicande par le premier terme a du multiplicateur, & j'écris le produit $3a^3x$; je multiplie de même le second terme du multiplicande par le premier du multiplicateur, ce qui me donne $+2ap$, en multipliant d'abord 2 par le coefficient 1 de a, & ensuite p par a; je multiplie de nouveau le multiplicande entier par $-2x$, second terme du multiplicateur, & j'écris de suite les produits $-6a^2x^2-4px$, & j'ai le produit total demandé.

Remarque. 1°. Pour multiplier une quantité algébrique par une autre, il faut multiplier tout le multiplicande par chaque terme du multiplicateur, & ajouter tous les produits pour avoir le produit total. 2°. Il est indifférent de multiplier a par p ou p par a; car le produit $ap=pa$, par la même raison

que $5 \times 4 = 4 \times 5 = 20$. De même $apd = pad$; car $ap = pa$, donc $ap \times d = pa \times d$. Soit $a = 2$, $p = 3$, $d = 4$, on aura $apd = 2 \times 3 \times 4 = 3 \times 2 \times 4$; car $2 \times 3 = 6$ & $6 \times 4 = 24 = 2 \times 4 \times 3 = 4 \times 3 \times 2 = 4 \times 2 \times 3 = 3 \times 4 \times 2$. De même, $apd = adp = pad = pda = dap = dpa$; de sorte qu'il est indifférent quelle lettre on mettra la première dans le produit; néanmoins, pour plus de clarté, il est à propos de suivre l'ordre alphabétique; ainsi en multipliant $2p$ par a, on écrira $2ap$, & non pas $2pa$. 3°. Quelquefois on se contente d'indiquer la multiplication sans la faire : ainsi $(a+b) \times (a-d)$ ou $(a+b)(a-d)$ indique qu'il faut multiplier $a+b$ par $a-d$; mais si on écrivoit $a+b \times (a-d)$ ou $a+b(a-d)$, cela signifieroit qu'il faut ajouter la quantité a au produit de b par $a-d$.

En donnant des valeurs aux lettres,

& en les ſubſtituant dans le premier exemple, on vérifiera les régles de la multiplication algébrique. Faiſant $a=3$, $c=2$, ſubſtituant, les deux facteurs $aa-2ac+cc$, $a-c$ & le produit $a^3-3a^2c+3ac^2-c^3$, deviendront $3\times 3-2\times 3\times 2+2\times 2$, $3-2$, $3\times 3\times 3-3\times 3\times 3\times 2+3\times 3\times 2\times 2-2\times 2\times 2$, ou $9-12+4$, 1, $27-54+36-8$, & par la réduction 1, 1, 1. Ce produit eſt bon, puiſque $1\times 1=1$.

PROBLÊME V. *Diviſer des quantités algébriques ?*

La *diviſion*, en Algebre, comme en Arithmétique, eſt une opération par laquelle étant données une quantité qu'on appelle *dividende*, & une autre quantité qu'on appelle *diviſeur*, il faut en trouver une troiſième qu'on appelle *quotient*, laquelle étant multipliée par la ſeconde, produiſe la première. Expliquons cette opération par ordre & avec quelque détail.

Il ſuit des régles qui ont été expliquées à l'article *Multiplication*, pour la multiplication des ſignes : 1°. que ſi le dividende & le diviſeur ont tous deux le ſigne +, le quotient aura auſſi le ſigne +. Cette régle s'exprime ainſi en général, $\frac{+}{+}$ donne +.

2°. Si le dividende a le ſigne +, & le diviſeur le ſigne —, le quotient aura le ſigne —. Cette régle s'exprime ainſi en général, $\frac{+}{-}$ *donne* —.

3°. Si le dividende a le ſigne —, & le diviſeur le ſigne +, le quotient aura le ſigne —. Cette régle s'exprime ainſi en général $\frac{-}{+}$ *donne* —.

4°. Si le dividende & le diviſeur ont tous les deux le ſigne —, le quotient aura le ſigne +. Cette régle s'exprime ainſi en général, $\frac{-}{-}$ *donne* +.

Tout cela eſt évident, puiſque le produit du diviſeur par le quotient, doit avoir un ſigne qui ſoit celui du dividende. Or dans le premier cas $+ \times + = +$, ſigne du dividende : dans le ſecond cas, $- \times - = +$, ſigne du dividende : dans le troiſième cas $+ \times - = -$, ſigne du dividende : dans le quatrième enfin $- \times + = -$, ſigne du dividende. Si l'on exprimoit au contraire ce quatrième cas de cette manière $\frac{-}{-} = -$, le produit du diviſeur multiplié par le quotient ſeroit $- \times - = +$; ce qui pêcheroit contre les loix de la diviſion, puiſque — & non pas + eſt le ſigne du dividende. On peut appliquer le même raiſonnement aux trois autres cas.

1°. *Diviſer un monome par un autre monome ?*

Puiſque la *diviſion* décompoſe ce que la multiplication a compoſé, les opéra-

tions par lesquelles on trouve un quotient, doivent être contraires à celles par lesquelles on trouve un produit. Ainsi, pour résoudre le problême dont il s'agit ici, 1°. écrivez le signe qui doit précéder le quotient, conformément à la régle que nous venons de prescrire. 2°. Lorsque le dividende ou le diviseur, ou tous les deux ont des coefficiens autres que l'unité, divisez, suivant les régles de l'Arithmétique, le coefficient du dividende par celui du diviseur. 3°. Effacez les lettres communes au dividende & au diviseur. La quantité trouvée par toutes ces opérations, sera le quotient qu'on demandoit. Par exemple, le quotient de $+ab$ divisé par $+a$ est $+b$; celui de $-abh$ divisé par ab est $-h$; celui de $-mnpq$ divisé par $-nq$ est $+mp$; celui de $-15abb$ divisé par $3ab$ est $-5b$; celui de $-35mnpq$ divisé par $-7mn$ est $+5pq$.

Toutes ces opérations ſont évidentes ; car ſi l'on multiplie le diviſeur par le quotient, on aura pour produit, le dividende comme cela doit être : ainſi dans le dernier exemple $-7mn \times +5pq = -35mnpq$.

Remarque I. Quelquefois il ne ſe trouve pas de lettres communes au dividende & au diviſeur, ni de facteur commun à leurs coefficiens : alors la diviſion ne peut que s'indiquer. Par exemple, on ne peut qu'indiquer la diviſion de a par b, & la manière de l'indiquer eſt $\frac{a}{b}$; de même, la diviſion de $2a$ par $3b$, s'indique par $\frac{2a}{3b}$. Ces ſortes d'expreſſions doivent être conſidérées comme des fractions dont le numérateur eſt le dividende, & le dénominateur le diviſeur.

Quelquefois les lettres ou les facteurs du

du diviſeur ne ſe trouvent qu'en partie dans le divende : alors la diviſion ſe fait en partie, & s'indique en partie. Ainſi, en diviſant $-abcd$ par $+abh$, le quotient eſt $-\frac{cd}{h}$.

Remarque II. Si, dans le dividende & dans le diviſeur, il ſe trouve une même lettre avec des expoſans différens, la diviſion de ces deux quantités ſe fait en retranchant de l'expoſant du dividende, l'expoſant du diviſeur. Ainſi,

$$\frac{a^4}{a^2} = a^{4-2} = a^2; \quad \frac{8a^5b^2}{4a^3b} = 2a^{5-3}b^{2-1} = 2a^2b; \quad \frac{5a^7b^4c^2}{7a^6b^2c} = \frac{5a^{7-6}b^{4-2}c^{2-1}}{7} = \frac{5ab^2c}{7}.$$

En effet, $\frac{a^4}{a^2}$ n'eſt autre choſe que $\frac{aaaa}{aa}$, qui devient (en effectuant la

division), aa ou a^2. De même....

$$\frac{8a^5b^2}{4a^3b} = \frac{8aaaaabb}{4aaab} = 2aab = 2a^2b$$; ainsi des autres.

On voit par-là que $a^0 = 1$; car $1 = \frac{a}{a} = \frac{a^1}{a^1} = a^{1-1} = a^0$.

Ainsi toute quantité élevée à la puissance o vaut 1; car une telle expression représente toujours le quotient d'une grandeur divisée par elle-même, quotient qui est nécessairement 1, puisque toute grandeur se contient une fois elle-même.

Remarque III. Si l'exposant d'une lettre dans le dividende, est moindre que l'exposant de la même lettre dans le diviseur, on aura un reste négatif, en retranchant le second exposant du premier. Ainsi, $\frac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3}$; $\frac{7a^3b^2}{a^5b^3} = 7a^{3-5}b^{2-3} = 7a^{-2}b^{-1}$.

Il est évident que, si on avoit commencé par supprimer les lettres communes au dividende & au diviseur, on auroit eu $\frac{a^2}{a^5} = \frac{1}{a^3} = \frac{a^0}{a^3} = \ldots a^{-3}$; $\frac{7a^3b^2}{a^5b^3} = \frac{7}{a^2b} = \frac{7a^0b^0}{a^2b} \ldots 7a^{-2}b^{-1}$.

2°. *Diviser un polynome quelconque par un monome?*

On divisera successivement tous les termes du dividende par le diviseur; & la somme de tous les quotiens partiels formera le quotient total.

Il est à propos, pour faciliter l'opération, d'*ordonner* le polynome, c'est-à-dire, d'écrire successivement, en allant de gauche à droite, tous les termes où une lettre, choisie à volonté, a les plus grands exposans, & de diviser ensuite, dans le même ordre, chaque terme du polynome par le diviseur.

EXEMPLE. *Diviſer le polynome* $a^2b^2 - 2a^3d + 4a^4 - 4abcd$, *par le monome* $-2a^2$?

Je commence par ordonner le polynome par rapport à la lettre a qui ſe trouve au dividende & au diviſeur; je diſpoſe ces deux quantités, comme pour les quantités numériques, & comme on le voit ici. Enſuite je diviſe tous les termes du dividende par le diviſeur, & j'écris chaque quotient partiel, à meſure que je le trouve. La ſomme de tous les quotiens partiels forme le quotient total.

Dividende.	Diviſeur.
	$-2a^2$.
$4a^4 - 2a^3d +$	quotient.
$a^2b^2 - 4abcd$	$-2a^2 + ad - \frac{b^2}{2} + \frac{2bcd}{a}$.

3°. *Diviſer un polynome par un polynome ?*

On commencera par ordonner le dividende & le diviſeur, par rapport à une même lettre; puis on diviſera toutes les parties du dividende par le diviſeur, en ſuivant à-peu-près les mêmes procédés que dans l'Arithmétique. Cela s'entendra mieux par des exemples.

EXEMPLE I. *Diviſer le polynome* $3ab^2 - 3ab^2 + a^3 - b^3$, *par le polynome* $2ab + a^2 + b^2$?

J'ordonne d'abord le dividende & le diviſeur par rapport à la même lettre a.

Divid. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$,	
$-a^3 + 2a^2b - ab^2$,	Diviſeur.
	$a^2 - 2ab + b^2$.
1er reſte. . $-a^2b + 2ab^2 - b^3$,	quotient.
$+a^2b - 2ab^2 + b^3$,	$a - b$
2e reſte 0	

Cela posé, je divise le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur ; & comme ils sont censés avoir tous les deux le signe +, le quotient aura aussi le signe + qu'on pourra supprimer, parce qu'il commence la phrase. Or en divisant a^3 par a^2, on a pour quotient la lettre a, que j'écris à l'endroit du quotient. Je multiplie le diviseur entier $a^2 - 2ab + b^2$, par le quotient partiel a, ce qui donne le produit $a^3 - 2a^2b + ab^2$. Ce produit doit être retranché du dividende. Ainsi, je l'écris sous le dividende, avec des signes contraires à ceux qu'il a ; & , après avoir fait la réduction, c'est-à-dire, après avoir effacé les termes qui se trouvent avec des signes contraires au dividende & à la quantité qui vient d'être écrite au-dessous de lui, j'ai le reste $-a^2b + 2ab^2 - b^3$, qu'il faut diviser par le diviseur $a^2 - 2ab + b^2$.

Je fais cette seconde opération en di-

viſant le premier terme $-a^2 b$ du dividende, par le premier terme a^2 du diviſeur; j'ai pour ſecond quotient partiel, $-b$, que j'écris à la ſuite de la première partie a du quotient total. Je multiplie le diviſeur entier par $-b$; ce qui donne le produit $-a^2 b + 2ab^2 - b^3$, que j'écris, avec des ſignes contraires, ſous le dividende. Et comme après avoir fait la réduction, il ne reſte rien, je conclus que le quotient exact de la quantité $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, diviſé par $a^2 - 2ab + b^2$, eſt $a - b$.

EXEMPLE II. *Diviser* $a^5 + b^5$ *par* $a + b$?

Divid...	$a^5 + b^5$,	Diviseur.
	$-a^5 - a^4b$,	$a + b$
1er reste	$-a^4b + b^5$,	quotient.
	$+a^4b + a^3b^2$,	$a^4 - a^3b +$
		$a^2b^2 - ab^3 +$
2e reste	$a^3b^2 + b^5$,	b^4.
	$-a^3b^2 - a^2b^3$,	
3e reste	$-a^2b^3 + b^5$,	
	$+a^2b^3 + ab^4$,	
4e reste	$ab^4 + b^5$,	
	$-ab^4 - b^5$,	
5e reste	0	

Le dividende & le diviseur étant ordonnés par rapport à a, je divise le premier terme a^5 du dividende, par le premier terme a du diviseur; il vient le premier quotient partiel a^4, que j'écris à sa place; je multiplie le divi-

ſeur $a+b$ par a^4; & j'écris le produit avec des ſignes contraires, ſous le dividende; il vient $-a^5-a^4b$. Faiſant la réduction du dividende & de cette quantité, on a, pour premier reſte, ou pour ſecond dividende partiel, ordonné par rapport à a, la quantité $-a^4b+b^5$.

Je diviſe le premier terme $-a^4b$ de ce dividende, par le premier terme a du diviſeur; il vient le ſecond quotient partiel $-a^3b$, que j'écris à la ſuite du premier: je multiplie $a+b$ par $-a^3b$; & j'écris le produit avec des ſignes contraires ſous le dividende; il vient $a^4b+a^3b^2$. Faiſant la réduction, le ſecond reſte, ou le troiſième dividende partiel eſt $a^3b^2+b^5$.

Je diviſe le premier terme a^3b^2 de ce dividende par a; il vient au quotient $+a^2b^2$ que j'écris; je multiplie le diviſeur $a+b$ par a^2b^2, & j'écris le produit avec des ſignes contraires, ſous le dividende; il vient $-a^3b^2-$

a^2b^3. La réduction étant faite, on a $-a^2b^3+b^5$ pour troisième reste, ou pour quatrième dividende partiel.

Je divise $-a^2b^3$ par a; il vient $-ab^3$ pour quatrième quotient partiel; je multiplie le diviseur $a+b$ par $-ab^3$, & j'écris le produit avec des signes contraires, sous le dividende; il vient $+a^2b^3+ab^4$. La réduction faite, on a ab^4+b^5 pour quatrième reste, ou pour cinquième dividende partiel.

Je divise ab^4 par a; il vient b^4 pour cinquième quotient partiel; je multiplie $a+b$ par b^4, & j'écris le produit avec des signes contraires, sous le dividende; il vient $-ab^4-b^5$. La réduction faite, on a o pour reste: d'où je conclus que le quotient exact de la quantité a^5+b^5 divisée par $a+b$, est $a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4$.

Remarque. Quelquefois, après avoir ordonné le dividende & le diviseur par rapport à une lettre, il se trouve plu-

ſieurs termes dans leſquels cette lettre a le même expoſant. Alors il faut diſpoſer tous ces termes dans une même colonne verticale, & regarder leur aſſemblage comme un même tout ; mais chaque quotient partiel ſe détermine toujours de la même manière.

EXEMPLE. *Diviſer* $10a^3 + 11a^2b - 19abc - 15a^2c + 3ab^2 + 15bc^2 - 5b^2c$, *par* $3ab + 5a^2 - 5bc$?

J'ordonne le dividende & le diviſeur par rapport à la lettre a, & j'ai $10a^3 + 11a^2b - 15a^2c - 19abc + 3ab^2 + 15bc^2 - 5b^2c$ à diviſer par $5a^2 + 3ab - 5bc$. Or, comme dans le dividende il y a deux termes qui contiennent a^2, je diſpoſe mon dividende & mon diviſeur comme on le voit ici.

Dividende.

Diviseur. $5a^2 + 3ab - 5bc$.

Quot. $2a + b - 3c$.

$$\begin{cases} 10a^3 + 11a^2b - 19abc + 15bc^2 - \\ 5b^2c, \\ \ldots\ldots -15a^2c + 3ab^2, \end{cases}$$

$$-10a^3 - 6a^2b + 10abc,$$

1.er reste. $\begin{cases} 5a^2b - 9abc + 15bc^2 - \\ 5b^2c, \\ -15a^2c + 3ab^2, \end{cases}$

$$-\ 5a^2b - 3ab^2 + 5b^2c,$$

2.e reste. $\begin{cases} -15a^2c - 9abc + 15bc^2, \\ +15a^2c + 9abc - 15bc^2, \end{cases}$

3.e reste. 0 0 0

Je divise $10a^3$ par $5a^2$, il vient $2a$ au quotient ; je multiplie le diviseur par $2a$, & j'écris le produit avec des signes contraires, sous le dividende. Puis, ayant fait la réduction, j'ai le premier reste écrit ci-dessus.

Je divise ensuite le premier terme

$5a^2b$ de ce reſte par $5a^2$; il vient $+b$ au quotient ; je multiplie le diviſeur par $+b$; & ayant écrit le produit, avec des ſignes contraires, ſous le dividende, puis ayant fait la réduction, on a un ſecond reſte écrit ci-deſſus.

Je diviſe le premier terme $-15a^2c$ de ce reſte par $5a^2$; enſuite, ayant fait les mêmes opérations que ci-devant, il ne reſte rien. Ainſi, la diviſion eſt achevée, & le quotient exact eſt $2a+b-3c$.

USAGES DES SUITES POUR LA DIVISION.

Il arrive ſouvent que, le diviſeur étant complexe, la diviſion ne peut pas ſe faire exactement. Par exemple, qu'on ait à diviſer $a^2+2ab+bb+c^2$ par $a+b$; on trouvera que le quotient eſt $a+b$, & que le reſte eſt c^2 ; de ſorte qu'en indiquant la diviſion de ce reſte par le diviſeur, le quotient total ſera

$a+b+\frac{c^2}{a+b}$. Mais, si on veut n'avoir au quotient que des monomes, ce qui est utile dans une infinité d'occasions, on pourra développer le quotient en une suite infinie, de la manière qu'on va l'expliquer sur l'exemple suivant.

EXEMPLE. *Diviser à l'infini c^2 par $a+b$?*

Divid. c^2,	Diviseur.
$-c^2-\frac{c^2b}{a}$,	$a+b$
	quotient.
1er reste $-\frac{c^2b}{a}$,	$\frac{c^2}{a}-\frac{c^2b}{a^2}+\ldots$
$+\frac{c^2b}{a}+\frac{c^2b^2}{a^2}$,	$\frac{c^2b^2}{a^3}-\frac{c^2b^3}{a^4}+$
2e reste $+\frac{c^2b^2}{a^2}$,	$\frac{c^2b^4}{a^5}-$ &c.
$-\frac{c^2b^2}{a^2}-\frac{c^2b^3}{a^3}$,	

3^e reste $-\frac{c^2 b^3}{a^3}$,

$+\frac{c^2 b^3}{a^3}+\frac{c^2 b^4}{a^4}$,

4^e reste $-\frac{c^2 b^4}{a^4}$,

$-\frac{c^2 b^4}{a^4}-\frac{c^2 b^5}{a^5}$,

5e reste &c.

Je divise le dividende c^2 par le premier terme a du diviseur, ou plutôt j'indique cette division, parce que le dividende c^2 & le diviseur a n'ont pas de lettre commune. Le quotient est $\frac{c^2}{a}$, que j'écris à la place où il doit être. Je multiplie le diviseur $a+b$ par $\frac{c^2}{a}$, & j'écris le produit, avec des signes contraires, sous le dividende. Puis, ayant fait la réduction, j'ai —

$\frac{c^2 b}{a}$ pour premier reſte, ou pour ſecond dividende partiel.

Je diviſe enſuite le dividende par le premier terme a du diviſeur, & j'ai $-\frac{c^2 b}{a^2}$ pour ſecond quotient partiel que j'écris à la ſuite du premier. Je multiplie le diviſeur $a+b$ par $-\frac{c^2 b}{a^2}$; & j'écris le produit, avec des ſignes contraires ſous le dividende. La réduction faite, j'ai $+\frac{c^2 b^2}{a^2}$ pour ſecond reſte, ou pour troiſième dividende partiel à diviſer par $a+b$.

On continuera la diviſion toujours de la même manière. Il eſt évident qu'elle n'aura pas de fin, & qu'elle donnera continuellement de nouveaux termes au quotient. Le quotient total ſera donc exprimé par cette ſuite infinie:

$$\frac{c^2}{a} - \frac{c^2 b}{a^2} + \frac{c^2 b^2}{a^3} - \frac{c^2 b^3}{a^4} + \ldots \frac{c^2 b^4}{a^5} - \&c.$$

Comme chaque terme de cette ſuite a c^2 pour un de ſes facteurs, elle peut être écrite ſous cette forme :

$$c^2 \times \left(\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \ldots \frac{b^4}{a^5} - \&c. \right)$$

REMARQUES GÉNÉRALES ſur les Règles de l'Algebre.

Une quantité ou un terme algébrique peut être compoſé de quatre caractères différens, ſigne, coefficient, lettres, expoſans. De plus, lorſque ce terme fait portion d'un polynome, il peut être ſemblable à un ou à pluſieurs autres termes du même polynome.

La *réduction* exige ſeule des termes

semblables ; c'est-à-dire, ceux qui n'ont que les mêmes lettres, & écrites le même nombre de fois, ou (ce qui est la même chose) affectées des mêmes exposans. La *réduction* n'opère que sur les *signes* & sur les *coefficiens*, & elle suit dans sa marche les régles combinées de l'*Addition* & de la *Soustraction*; c'est pourquoi on ne doit pas la regarder comme une régle proprement dite.

I. Pour les signes....l'*Addition* les laisse tels qu'ils sont.... la *Soustraction* les change seulement dans la quantité à soustraire..... La *Multiplication* & la *Division* opèrent toutes les deux de la même manière sur les signes, en donnant le signe positif pour résultat de deux signes de même nature, & le signe négatif pour résultat de deux signes de nature différente.

II. Pour les coefficiens....les régles de l'Algebre sont les mêmes que les quatre de l'Arithmétique.

III. Pour les lettres.... à proprement parler, l'*Addition* & la *Souſtraction* n'opèrent point ſur les lettres.... La *Multiplication* & la *Diviſion* opérent ſur les lettres, l'une en les réuniſſant toutes ſans interpoſition de ſignes dans le produit, l'autre en faiſant diſparoître ſeulement celles qui étoient les mêmes & écrites le même nombre de fois dans le dividende & dans le diviſeur.

IV. Pour les expoſans..... l'*Addition* & la *Souſtraction* n'affectent point les expoſans.....La *Multiplication* & la *Diviſion* les affectent ſeules ; la première opère par la voie d'*Addition* ſur les expoſans des lettres qui ſont les mêmes dans les deux facteurs, & la ſeconde opère par la voie de *Souſtraction* dans le même cas.

Des Fractions algébriques.

Les fractions *littérales* ou algébriques ſont, comme les fractions numériques, les quotiens des numérateurs diviſés par les dénominateurs. Ainſi, tout ce que nous avons dit au ſujet des fractions numériques, s'applique également aux fractions littérales, en ſubſtituant aux opérations arithmétiques les opérations algébriques correſpondantes, c'eſt-à-dire, addition à addition, ſouſtraction à ſouſtraction, &c. On verra par cette correſpondance, la raiſon de la plupart des calculs que nous allons faire ſur les fractions littérales, & cela nous épargnera beaucoup de raiſonnemens.

Problême I. *Réduire une quantité entière en une fraction qui ait un dénominateur donné?*

Soit la quantité a qu'il s'agit de réduire en une fraction qui ait le dénominateur b. Je multiplie a par b, & j'ap-

plique ſous le produit ab, le dénominateur b; en ſorte que a eſt la même choſe que $\frac{ab}{b}$.

Corollaire. On voit ſemblablement que toute fraction peut être transformée en une autre de même valeur, en multipliant ou diviſant ſon numérateur & ſon dénominateur par une même quantité. Ainſi, la fraction $\frac{a}{b}$ devient (en multipliant haut & bas par c) $\frac{ac}{bc}$; la fraction $\frac{aa+ab}{aa-bb}$ devient (en diviſant haut & bas par $a+b$), $\frac{a}{a-b}$.

Problême II. *Réduire en une ſeule fraction une quantité composée d'un entier & d'une fraction?*

Multipliez l'entier par le dénominateur de la fraction, & appliquez ſous le

tout ce dénominateur. Ainsi, $a + \frac{bd}{c}$ devient $\frac{ac+bd}{c}$; $a + \frac{ac-cd-ad}{c+d}$ devient $\frac{ac+ad+ac-cd-ad}{c+d}$, ou $\frac{2ac-cd}{c+d}$, en faisant la réduction du numérateur.

PROBLÊME III. *Tirer les entiers qui peuvent se trouver dans une fraction?*

Divisez le numérateur par le dénominateur, autant que cela sera possible. Ainsi, ayant la fraction $\frac{a^2+ab-cd}{a}$, je divise les deux premiers termes du numérateur par a, & je la réduis, par ce moyen à cette quantité $a+b-\frac{cd}{a}$. De même, la fraction........ $\frac{a^2-2ab+b^2+c^2}{a-b}$ devient $a-b+$

$\frac{c^2}{a-b}$, divisant les trois premiers termes du numérateur par $a-b$.

PROBLÊME IV. *Réduire plusieurs fractions au même dénominateur?*

Multipliez le numérateur & le dénominateur de chacune d'elles, par le produit des dénominateurs de toutes les autres, & appliquez sous chaque nouveau numérateur, le produit de tous les dénominateurs. Ainsi, les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, se changent respectivement en celles-ci: $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{dcf}{bdf}$, $\frac{bde}{bdf}$, qui ont le même dénominateur.

L'opération se feroit de même, si le numérateur, ou le dénominateur, ou tous les deux, étoient des quantités complexes. Ainsi les deux fractions $\frac{a-b}{b+c}$,

$\frac{g+h}{f+e}$ deviennent $\frac{(a-b)\times(f+e)}{(b+c)\times(f+e)}$,

$\frac{(g+h)\times(b+c)}{(b+c)\times(f+e)}$, ou bien (en effectuant les multiplications)..........

$$\frac{af-bf+ae-be}{bf+cf+be+ce}, \quad \frac{bg+bh+cg+ch}{bf+cf+be+ce}.$$

Remarque. Lorſque les fractions ont des facteurs communs à leurs dénominateurs, elles peuvent être réduites à la même dénomination, d'une manière abrégée, qui eſt utile dans la pratique du calcul. Soient, par exemple, les deux fractions $\frac{a^3}{bc}$, $\frac{dfg}{bh}$, dont les dénominateurs ont le facteur commun b; je vois qu'en multipliant la première, haut & bas, par le facteur non commun h du dénominateur de la ſeconde, & la ſeconde, auſſi haut & bas, par le facteur non commun c du dénominateur de la première, je les réduirai tout

tout de ſuite au même dénominateur, elles deviendront ainſi $\frac{a^3h}{bch}$, $\frac{cdfg}{beh}$.

PROBLÊME V. *Ajouter des fractions avec d'autres quantités entières ou rompues?*

Ecrivez toutes les quantités à ajouter, les unes à la ſuite des autres, avec les ſignes qu'elles ont, & faites les réductions dont la ſomme peut être ſuſceptible. Qu'on ait à ajouter enſemble la quantité entière $a-b$, & la fraction $\frac{b^2}{a+b}$: j'écris $a-b+\frac{b^2}{a+b}$; & en réduiſant l'entier en une fraction qui ait le dénominateur $a+b$, j'ai...... $\frac{a^2-b^2+b^2}{a+b}$, c'eſt-à-dire, $\frac{a^2}{a+b}$.

Pour ajouter enſemble les trois fractions $+\frac{a}{b}$, $-\frac{c}{d}$, $+\frac{e}{f}$, j'écris $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$. Si on réduit ces trois frac-

tions au même dénominateur, on aura $\frac{adf}{bdf} - \frac{bcf}{bdf} + \frac{bde}{bdf}$, ou bien... $\frac{adf - bcf + bde}{bdf}$.

PROBLÊME VI. *Faire la soustraction des quantités où il se trouve des fractions?*

Changez les signes de la quantité que vous devez soustraire, &, en cet état, écrivez-la à la suite de celle dont elle doit être soustraite. Ainsi, pour retrancher $\frac{b^2}{a+b}$ de $a - b$, j'écris $a - b - \frac{b^2}{a+b}$, & en réduisant tout en fraction, je trouve $\frac{a^2 - b^2 - b^2}{a+b}$, ou bien $\frac{a^2 - 2b^2}{a+b}$. Pour soustraire $-a$ de... $\frac{aa}{a-b}$, j'écris $\frac{aa}{a-b} + a$, ou bien

$\frac{aa+aa-ab}{a-b}$, ou $\frac{2a^2-ab}{a-b}$. Pour foustraire la fraction $-\frac{c}{d}$ de la fraction $\frac{a}{b}$, j'écris $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$, & en réduisant les deux fractions au même dénominateur, on aura $\frac{ad+bc}{bd}$ pour résultat de la foustraction.

PROBLÊME VII. *Multiplier un entier en une fraction, ou une fraction par une fraction ?*

Soit à multiplier l'entier $-3a$ par la fraction $\frac{m}{n}$, ou la fraction $\frac{m}{n}$ par l'entier $-3a$: je multiplie enfemble l'entier & le numérateur de la fraction, & j'applique le dénominateur fous le produit ; ce qui donne $-\frac{3am}{n}$.

Soit à multiplier enfemble les deux

fractions $-\frac{5a}{b}$ & $\frac{4f}{c}$; je multiplie numérateur par numérateur, & dénominateur par dénominateur; ce qui donne $-\frac{20af}{bc}$ pour le produit demandé.

PROBLÊME VIII. *Diviser une fraction par un entier, ou un entier par une fraction, ou une fraction par une fraction?*

Soit la fraction $\frac{m}{n}$ à diviser par l'entier $-3a$; je conserve le numérateur de la fraction, & je multiplie le dénominateur par $-3a$; ce qui donne $\frac{m}{-3an}$ ou $-\frac{m}{3an}$ pour le quotient cherché.

Soit à diviser l'entier $-3a$ par la fraction $\frac{m}{n}$; je renverse la fraction-diviseur, & alors il s'agit de multiplier

$-3a$ par $\frac{n}{m}$, ce qui donne $-\frac{3an}{m}$ pour le quotient cherché.

De même, pour divifer la fraction $\frac{p}{q}$ par $\frac{m}{n}$, il faut renverfer la fraction-divifeur, & multiplier enfemble les deux fractions $\frac{p}{q}$, $\frac{n}{m}$; le quotient cherché eft donc $\frac{pn}{mq}$.

PROBLÊME IX. *Réduire une fraction à fes moindres termes?*

Cette opération fe fait, en cherchant le plus grand commun divifeur, que le numérateur & le dénominateur peuvent avoir, & en divifant ces deux termes par le divifeur.

Le plus grand commun divifeur de deux quantités algébriques fe trouve d'une manière analogue à celle par laquelle on le trouve dans l'Arithmétique. Après avoir ordonné les deux termes

de la fraction, par rapport à une même lettre, il faut diviser celui des deux termes, où cette lettre a le plus grand exposant, par le second; & pousser l'opération tant qu'elle est possible, conformément aux régles ordinaires de la division; ensuite il faut diviser, suivant les mêmes conditions, le second terme par le premier reste; puis le premier reste par le second reste; ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvienne à une division exacte; alors le dernier diviseur est le plus grand commun diviseur des deux termes de la fraction proposée. Si on ne pouvoit pas parvenir à faire une division exacte, la fraction seroit irréductible. On voit que le procédé est absolument le même pour les fractions littérales que pour les fractions numériques. Avant que d'appliquer cette régle à des exemples, nous ferons quelques observations qui tendent à simplifier le calcul.

On ne change rien au commun diviſeur de deux quantités, en multipliant ou en diviſant l'une de ces quantités par un facteur qui n'eſt pas diviſeur de l'autre. Qu'on ait, par exemple, la fraction $\frac{ab}{ac}$, dont les deux termes ont a pour diviſeur commun : en multipliant le numérateur ou le dénominateur par une quantité d, on formera la nouvelle fraction $\frac{abd}{ac}$, ou $\frac{ab}{acd}$, dont les deux termes n'ont pas d'autre diviſeur commun que a. Mais ſi la quantité par laquelle on multiplie un des termes de la fraction, étoit diviſeur de l'autre terme, alors on changeroit le diviſeur commun. Par exemple, qu'on multiplie le numérateur de la fraction $\frac{ab}{ac}$ par c, qui eſt diviſeur du dénominateur, on formera la fraction $\frac{abc}{ac}$,

dont les deux termes ont, pour diviſeur commun, ac, & non pas ſimplement a comme tout-à-l'heure. De même, ſi l'on multiplie le dénominateur de la fraction $\frac{ab}{ac}$, par b, qui eſt diviſeur du numérateur, on formera la fraction $\frac{ab}{abc}$, dont les deux termes ont pour diviſeur commun ab, & non a ſimplement. On ne conſerve donc le même diviſeur commun aux deux termes d'une fraction, qu'en multipliant ou en diviſant l'un de ces deux termes par une quantité qui ne ſoit pas diviſeur de l'autre.

EXEMPLE I. *Trouver le plus grand commun diviſeur de la fraction......*

$$\frac{a^3 + ab^2 - a^2b - b^3}{4a^4 - 2a^2b^2 - 4a^3b + 2ab^3}?$$

J'ordonne tout par rapport à la lettre a, & je prens le dénominateur pour di-

vidende, & le numérateur pour divifeur. Cela pofé,

1°. Comme $2a$ divife tous les termes du dividende, & ne divife pas ceux du divifeur; je commence par délivrer le dividende de ce divifeur, pour fimplifier l'opération. Il devient ainfi $2a^3 - 2a^2b - ab^2 + b^3$ à divifer par $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$. Le quotient eft 2, & le refte $-3ab^2 + 3b^3$.

2°. Je prens pour dividende le divifeur $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$, & pour divifeur le premier refte $-3ab^2 + 3b^3$. Et comme $3b^2$ eft divifeur de ce refte, fans l'être du nouveau dividende, je délivre mon divifeur actuel du facteur $3b^2$. Par ce moyen, j'ai $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$ à divifer par $-a + b$. Il vient pour quotient $-a^2 - b^2$. D'où je conclus que $-a + b$ eft le plus grand commun divifeur cherché. Divifant donc les deux termes de la fraction propofée

ordonnée $\frac{a^3 - a^2 b + a b^2 - b^3}{4a^4 - 4a^3 b - 2a^2 b^2 + 2ab^3}$

par $-a+b$, elle deviendra......

$\frac{-a^2 - b^2}{-4a^3 - 2ab^2}$, ou $\frac{a^2 + b^2}{4a^3 + 2ab^2}$, &

ſera réduite à ſes moindres termes.

EXEMPLE II. *Trouver le plus grand commun diviſeur de la fraction*....

$\frac{2a^4 + 2a^3 b - a^2 bc - ab^2 c}{3a^3 + 3a^2 b + 4ab^2 + 4b^3}$?

J'ordonne tout par rapport à la lettre a; & je prens pour dividende le numérateur, & pour diviſeur le dénominateur.

1°. Je prépare le dividende en diviſant tous ſes termes par a qui n'eſt pas diviſeur commun de tous les termes du dénominateur. Enſuite je multiplie tous les termes du même dividende par 3, qui n'eſt pas diviſeur du dénominateur, afin de rendre le premier terme du dividende diviſible par le premier

terme du diviſeur. Par ces deux opérations, j'ai $6a^3 + 6a^2b - 3abc - 3b^2c$ à diviſer par $3a^3 + 3a^2b + 4ab^2 + 4b^3$. Le quotient eſt 2, & le reſte $- 3abc - 8ab^2 - 3b^2c - 8b^3$.

2°. Je prens pour dividende le diviſeur précédent $3a^3 + 3a^2b + 4ab^2 + 4b^3$, & pour diviſeur le premier reſte $- 3abc - 8ab^2 - 3b^2c - 8b^3$. Je prépare la diviſion, en obſervant que $- 3bc - 8b^2$ diviſe le diviſeur & ne diviſe pas le dividende. (Cette obſervation eſt le fruit d'un long uſage.) Ainſi je délivre le diviſeur de ce facteur; & alors j'ai $3a^3 + 3a^2b + 4ab^2 + 4b^3$ à diviſer par $a + b$. La diviſion ſe fait exactement, & le quotient eſt $3a^2 + 4b^2$. Par conſéquent le plus grand commun diviſeur de la fraction propoſée,..................

$$\frac{2a^4 + 2a^3b - a^2bc - ab^2c}{3a^3 + 3a^2b + 4ab^2 + 4b^3} \text{ eſt } a + b;$$

&, en divisant son numérateur & son dénominateur par ce diviseur, cette fraction devient $\frac{2a^3 - abc}{3a^2 + 4b^2}$.

De la Formation des Puissances, et de l'extraction des Racines.

Dès l'Arithmétique, nous aurions pu traiter des puissances & de l'extraction des racines; mais nous avons remis à traiter cette matière après les élémens d'Algebre, parce que ces élémens en facilitent l'intelligence. C'est pourquoi nous appliquerons à-la-fois & aux quantités algébriques & aux nombres, les principes de la formation des puissances & de l'extraction des racines.

De la Formation des Puissances.

Le mot *puissance* désigne le produit d'une quantité algébrique, & d'un nombre multipliés par eux-mêmes un certain nombre

nombre de fois. On diſtingue les degrés des puiſſances d'une quantité quelconque par les expoſans de cette quantité. Ainſi a, ou a^1 eſt la première puiſſance de a. La ſeconde eſt a^2, la troiſième a^3, &c. En général, a^m eſt la puiſſance m de a, quelle que ſoit la valeur de m; & cet expoſant eſt appelé *expoſant indéterminé*. Si $a = 3$, & $m = 2$; on aura $a^m = 3^2 = 3 \times 3 = 9$. Si $m = 4$, & $a = 2$; on aura $a^m = 2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$.

Cette quantité a eſt la *racine* de ces divers produits, & la dénomination de cette racine dépend de la puiſſance correſpondante. La racine c de c^2 s'appelle la racine ſeconde, ou la *racine quarrée*. La racine de a^3 eſt a, elle s'appelle la *racine cubique*, ou racine troiſième. La racine quatrième de x^4 eſt x, &c, &c.

On donne à la puiſſance ſeconde, le nom de *quarré*, parce qu'elle eſt le

produit de deux facteurs égaux, c'est-à-dire, d'une quantité multipliée par elle-même; de même qu'en Géométrie on appelle *quarré* la surface à deux dimensions égales, longueur & largeur. On donne aussi le nom de *cube* à la puissance troisième, parce qu'elle est le produit de trois facteurs égaux, c'est-à-dire, d'une quantité multipliée deux fois par elle-même; de même qu'en Géométrie on appelle *cube* le solide à trois dimensions égales, longueur, largeur & profondeur. Par la même analogie, la première puissance est appelée *puissance linéaire*; à cause que la ligne géométrique n'a, comme elle, qu'une seule dimension, la longueur. Ainsi a^1, a^2, a^3, sont la *puissance linéaire*, le *quarré* & le *cube* de a.

La multiplication d'une quantité par une autre est indiquée par le signe ×, ou par le *point* placés entre les deux

quantités. Faut-il multiplier b par a, on écrira $b \times a$, ou $b.a$. Faut-il multiplier $a+b$ par $c-d$, on écrira $(a+b)\times(c-d)$, ou $\overline{a+b}\times\overline{c-d}$, ou plus ſimplement, ſans exprimer le ſigne de la multiplication $(a+b)(c-d)$.

Puiſque la première puiſſance de a eſt a, ou a^1; que la ſeconde puiſſance eſt a^2 ou aa; que la troiſième puiſſance eſt a^3 ou aaa; que la quatrième eſt a^4 ou $aaaa$, &c. on peut en conclure que

Pour élever une quantité à une puiſſance donnée, il faut multiplier cette quantité par elle-même, autant de fois moins une que l'expoſant de la puiſſance contient d'unités. Ainſi, pour élever le nombre 9 à la troiſième puiſſance, il faut le multiplier deux fois par lui-même, en diſant d'abord $9.9=81$.... puis $81.9=729$.

De même, le quarré de $\frac{1}{3}$ eſt $\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$: ſon cube eſt $\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$; ſa quatrième puiſſance eſt $\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{81}$, &c. Le quarré de $\frac{1}{10}$ eſt $\frac{1}{100}$; ſon cube eſt $\frac{1}{1000}$; ſa quatrième puiſſance eſt $\frac{1}{10000}$, &c.

D'où l'on voit que la valeur d'une fraction diminue à meſure qu'on l'élève à de plus hautes puiſſances, & que cette diminution eſt d'autant plus rapide que le dénominateur eſt plus grand par rapport au numérateur.

Quant aux expreſſions algébriques, 1°. s'il s'agit d'un monome, on met à toutes ſes lettres l'expoſant de la puiſſance propoſée. Ainſi, la cinquième de abc eſt $a^5b^5c^5$. La puiſſance m de $\frac{ab}{cd}$ eſt $\frac{a^mb^m}{c^md^m}$; & ſi le monome a un coefficient, on éleve auſſi ce coefficient à la puiſſance indiquée. Le cube de $\frac{2ab}{5fg}$, par exemple, eſt $\frac{8a^3b^3}{125f^3g^3}$.

Pour un polynome, il ſuffit quelquefois d'indiquer la puiſſance à laquelle on veut l'élever. Cela ſe fait, ou en le couvrant d'un trait au bout duquel on écrit l'expoſant, ou en le renfermant entre deux crochets. Ainſi $\overline{a+b}^{m}$, & $(a+b)^m$ déſigne également la puiſſance m du binome $a+b$.

Si $m=2$, alors le binome $a+b$, qui par ſa généralité peut repréſenter tous les binomes poſſibles, doit être multiplié une fois par lui-même, & on trouve que....... $a+b$
multiplié par..... $a+b$

$$\begin{array}{l} a^2+ab \\ \quad +ab+b^2 \end{array}$$

donne.......... $a^2+2ab+b^2$

Or a^2 eſt le quarré du premier terme du binome; $2ab$ eſt le double produit de ce premier terme par le ſe-

cond; b^2 eſt le quarré du ſecond. Ainſi on doit conclure généralement que le *quarré d'un binome quelconque contient trois termes, ſavoir*, 1°. *le quarré du premier terme;* 2°. *le double du premier terme multiplié par le ſecond;* 3°. *le quarré du ſecond.*

Cette régle ne ſouffre aucune exception; & voilà comme l'Algebre s'éleve à des réſultats généraux, pendant que l'Arithmétique n'y parvient que par analogie, en ſe traînant d'exemple en exemple.

Quant aux ſignes, ils ſont tous poſitifs, lorſque les deux termes du binome ont le même ſigne; & lorſque ceux-ci ont des ſignes différens, le produit du double du premier par le ſecond eſt le ſeul terme négatif.

En élevant au quarré le trinome $a+b+c$, on trouvera, réduction faite, $a^2+2ab+2ac+2bc+b^2+c^2$. C'eſt-à-dire,

$$\left\{\begin{array}{l} a^2 + 2ab \\ + b^2 + 2ac \\ + c^2 + 2bc \end{array}\right\}$$, ou............

$$\left\{\begin{array}{l} a^2 \\ + b^2 + 2ab + 2c(a+b) \\ + c^2 \end{array}\right\}$$. D'où l'on peut conclure, en généralisant cette expression, que le quarré d'un trinome contient les quarrés de chaque terme en particulier, plus le double du premier par le second, plus le double du premier & du second par le troisième.

D'après cela, il est aisé de voir que le quarré de $(ax+yz) = a^2 x^2 + 2axyz + y^2 z^2$........ que celui de $(3mn - 4m^2) = 9m^2 n^2 - 24m^3 n + 16m^4$.... & que $(x + \frac{1}{2}a)^2 = x^2 + ax + \frac{a^2}{4}$. On voit aussi que $(b + 2c - y)^2 = b^2 + 4bc + 4c^2 - 2by - 4cy + y^2$.

Remarquez que pour completter le quarré d'un binome, lorsqu'on a déjà les deux premiers termes de ce quarré, *il ne faut que leur ajouter le quarré de la moitié du coefficient total du second.* (J'appelle ainsi tout ce qui affecte ce second terme, soit en chiffres, soit en lettres.) Si j'avois, par exemple, x^2+2ax à completter, je prendrois a, moitié de $2a$, coefficient total du second terme $2ax$, & j'ajouterois son quarré a^2 aux deux autres termes x^2+2ax, ce qui me donneroit alors le quarré parfait du binome $x+a$. Donc toutes les fois qu'on voudra completter un quarré, ayant déjà deux termes de cette forme, x^2+ax, il n'y aura qu'à écrire $x^2+ax+\frac{a^2}{4}$. Ceci trouvera plus d'une fois son application.

Lorsque dans $\overline{a+b}^m$, $m=3$; alors il faut multiplier le binome $a+b$ deux fois de suite par lui-même; ou, ce qui

eſt la même choſe, ſon quarré doit être multiplié par la première puiſſance. Or toute réduction faite, on trouve que

$$a^2 + 2ab + b^2$$

multiplié par........ $a + b$

$$a^3 + 2a^2b + ab^2$$
$$+ a^2b + 2ab^2 + b^3$$

donne....... $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

On doit donc en conclure généralement que *le cube d'un binome quelconque contient quatre termes*, 1°. *le cube du premier terme du binome.* 2°. *le triple du quarré de ce premier terme multiplié par le ſecond.* 3°. *Le triple du quarré du ſecond multiplié par le premier.* 4°. *Le cube du ſecond.* Ou plus briévement, *le cube d'un binome contient les cubes de ces deux termes, & les produits reſpectifs du triple du quarré de chacun de ces deux termes par l'autre.*

Quant aux ſignes, ils ſont tous poſitifs lorſque ceux du binome le ſont; on vient de le voir dans le cube de $a+b$. Lorſque les deux ſignes du binome ſont négatifs, tous ceux du cube le ſont auſſi.

EXEMPLES. $(-m-2n)^3 = -m^3 - 6m^2n - 12mn^2, - 8n^3$.... $-(a+1)^3 = -a^3 - 3a^2 - 3a - 1$. (Le ſigne $-$ mis avant la parenthèſe annonce qu'il faut changer les ſignes de tous les termes qui y ſont compris. Lorſque des deux termes du binome, il y en a un négatif, ceux du cube le ſont alternativement, de manière que les ſeuls termes négatifs du cube ſont ceux qui renferment les puiſſances impaires de la partie du binome affectée du ſigne $-$.

EXEMPLES. $(-p+q)^3 = -p^3 + 3p^2q - 3p^1q^2 + q^3$............. $(2ax-xx)^3 = 8a^3x^3 - 12a^2x^4 + 6ax^5 - x^6$.

Si $m=4$, le binome $a+b$ doit être

élevé à la quatrième puiſſance, & il en réſultera cinq termes, $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Si $m = 5$, on aura par un procédé ſemblable la cinquième puiſſance de $a + b$, compoſée de ſix termes. $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Et ainſi des autres puiſſances d'un binome quelconque, qui toutes ont pareillement *un terme de plus qu'il n'y a d'unités dans leurs expoſans.*

Mais s'il falloit paſſer par toutes les puiſſances intermédiaires, avant d'arriver à une puiſſance plus élevée dont on auroit beſoin, on ſent bien que le calcul en ſeroit ſouvent fort long & toujours indirect. Les Géomètres du ſiécle dernier avoient tant de fois épouvé cet inconvénient, qu'ils tournèrent leur attention vers la recherche d'une méthode qui pût les mener directement à leur but. Cette méthode ils la trouvèrent;

& Newton en eut la principale gloire.

Ce n'eſt pas encore ici le lieu de la démontrer : mais nous pouvons d'avance en préſenter les réſultats comme une des choſes les plus utiles qu'il y ait dans l'Algebre.

Une puiſſance quelconque d'un binome algébrique ne pouvant être compoſée que de ſignes, de coefficiens, de lettres & d'expoſans qui doivent en former les différens termes, il falloit, avant tout, des régles générales pour ces diverſes parties.

Or, 1°. la régle des ſignes ne pouvoit ſouffrir aucune difficulté.

2°. Celle des lettres n'en pouvoit pas ſouffrir non plus.

3°. Celle des expoſans fut d'abord déduite par une ſimple analogie que voici : On avoit remarqué que le premier terme de toutes les puiſſances auxquelles on élevoit un binome, étoit formé de la première partie de ce binome,

élevée à la puissance dont il s'agissoit.

On avoit remarqué aussi que dans les termes suivans, l'exposant de cette première partie diminuoit successivement d'une unité, pendant que l'exposant de la seconde partie augmentoit dans la même proportion.

On avoit remarqué enfin que cette diminution graduelle se continuoit jusqu'au dernier terme, où la seconde partie du binome restoit seule avec un exposant égal à celui de la puissance demandée.

De-là on conclut que pour élever un binome quelconque $p+q$ à la sixième puissance, par exemple, on n'avoit qu'à écrire (abstraction faite des coefficiens), $(p+q)^6 = p^6 + p^5 q + p^4 q^2 + p^3 q^3 + p^2 q^4 + p q^5 + q^6$; & ainsi des autres puissances plus élevées.

4°. Restoit donc la régle des coefficiens à trouver, & c'étoit la plus difficile. On avoit bien remarqué que le

coefficient du premier terme étoit toujours l'unité, & que celui du ſecond terme étoit toujours l'expoſant de la puiſſance propoſée. Mais juſqu'à Newton, on n'avoit fait qu'entrevoir la loi qui ſert maintenant à déterminer tous les autres coefficiens.

Voici à peu-près comment on l'avoit devinée. En dépouillant ſucceſſivement de leurs coefficiens les cinq premières puiſſances d'un binome quelconque, on avoit trouvé que ces coefficiens étoient,

pour la 1re puiſſance.. 1 , 1
pour la 2e........ 1 , 2 , 1
pour la 3e....... 1 , 3 , 3 , 1
pour la 4e...... 1 , 4 , 6 , 4 , 1
pour la 5e... 1 , 5 , 10 , 10 , 5 , 1

de manière que chaque premier coefficient de toutes ces puiſſances étoient 1, ainſi que le dernier, & que chacun des autres étoit la ſomme des deux coefficiens correſpondans de la puiſſance im-

médiatement précédente. Ainſi, les coefficiens de la cinquième puiſſance, à compter du ſecond juſqu'à l'avant-dernier, ſe forment en diſant $1+4=5 \ldots\ldots 4+6=10 \ldots\ldots 6+4=10 \ldots 4+1=5 \ldots\ldots$ Cette loi s'obſervant dans toutes les puiſſances que l'on avoit calculées, la ſeule analogie portoit à la regarder comme générale. Mais outre que l'analogie n'eſt point une démonſtration, l'inconvénient de ne pouvoir connoître les coefficiens d'une puiſſance, ſans la connoiſſance préalable de ceux de la puiſſance précédente, reſtoit dans ſon entier. On s'aviſa donc d'un autre expédient qui fournit la régle ſuivante, dont nous donnerons la démonſtration.

Pour trouver le coefficient d'un terme quelconque de la puiſſance propoſée d'un binome $p+q$, multipliez le coefficient du terme précédent par l'expoſant que p a dans le terme précédent, & diviſez le produit par le

nombre qui marque le rang de ce terme précédent. Le quotient sera toujours le coefficient cherché.

EXEMPLE. On voudroit avoir le développement de la septième puissance de $p+q$.....Ecrivez,

$$(p+q)^7 \left\{ \begin{array}{l} p^7 + \frac{1\cdot7}{1}p^6q + \frac{7\cdot6}{2}p^5q^2 + \\ \frac{7\cdot6\cdot5}{2\cdot3}p^4q^3 + \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{2\cdot3\cdot4}p^3q^4 \\ + \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{2\cdot3\cdot4\cdot5}p^2q^5 + \ldots\ldots \\ \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}pq^6 + \ldots\ldots \\ \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}q^7. \end{array} \right.$$

Et si on veut généraliser les régles que nous venons d'indiquèr, on trouvera que pour élever un binome quelconque $a+b$ à une puissance quelconque m, il faut écrire...$(a+b)^m =$

$$\left\{\begin{array}{l} a^m + m a^{m-1} b + \frac{m \cdot \overline{m-1}}{2} a^{m-2} b^2 + \\ \frac{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{2 \cdot 3} a^{m-3} b^3 \ldots\ldots + \\ \frac{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot \overline{m-3}}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-4} b^4 \ldots\ldots \end{array}\right.$$

Et ainſi de ſuite juſqu'à un dernier terme qui aura cette forme...............

$$\frac{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdots \overline{m-(m-1)}}{2 \cdot 3 \cdots m} b^m.$$

Si l'on veut maintenant appliquer cette *formule* à quelques exemples, on verra avec quelle promptitude elle les expédie. Soit donc propoſé de trouver la neuvième puiſſance du binome $a+b$.

On fera $m=9$, & on ſubſtituera les valeurs convenables dans la *formule*, ce qui donnera.......................

$$(a+b)^9 = \left\{ \begin{array}{l} a^9 + 9a^8b + \frac{9\cdot8}{2}a^7b^2 + \\ \frac{9\cdot8\cdot7}{2\cdot3}a^6b^3 + \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{2\cdot3\cdot4}a^5b^4 \\ + \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{2\cdot3\cdot4\cdot5}a^4b^5 + \ldots\ldots \\ \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}a^3b^6 + \ldots\ldots \\ \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}a^2b^7 + \ldots\ldots \\ \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}ab^8 + \ldots\ldots \\ \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}b^9. \end{array} \right.$$

Réduction faite, $(a+b)^9 = a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + \ldots\ldots 126a^5b^4 + 126a^4b^5 + 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + b^9$.

Soit proposé maintenant de calculer les premiers termes de la millième puissance de $a+b$. On supposera $m = 1000$,

& on trouvera $(a+b)^{1000} = a^{1000} +$ $1000\, a^{999} b + \frac{1000 \cdot 999}{2} a^{998} b^2 + \&c.$

THÉORIE DES EXPOSANS.

Puisque les degrés des puissances dépendent de leurs exposans, il est clair qu'il y a autant de puissances différentes d'une quantité quelconque b, qu'il peut y avoir d'exposans différens.

Or, 1°. il y a une infinité de nombres entiers; voilà donc déjà une infinité de puissances différentes, & celles-là se conçoivent sans peine.

Mais, 2°. il y a aussi une infinité de nombres fractionnaires. Or, ceux-là peuvent-ils, à leur tour, servir d'exposans? & au cas qu'ils en servent, quelles puissances indiquent-ils?

3°. Il y a de plus une infinité de nombres négatifs, soit entiers, soit fractionnaires. A quelles puissances répon-

dent-ils, quand ils ſervent d'expoſans ?

Pour répondre à cette double queſtions, nous allons développer *la théorie des expoſans*, l'une des plus importantes de l'Algébre élémentaire.

On a vu que le produit d'une quantité affectée d'un expoſant, par cette même quantité affectée auſſi d'un expoſant, ſe trouvoit tout de ſuite, en écrivant une ſeule fois cette quantité avec un expoſant égal à la ſomme de ceux des facteurs. Ainſi $a^2 \times a^6 = a^8$..... $b^3 \times b^7 = b^{10}$...... Et généralement $c^m \times c^n = c^{m+n}$.

Donc, par la raiſon contraire, ſi le dividende ne differe du diviſeur que par ſon expoſant, leur quotient doit être la quantité qui leur eſt commune, affectée d'un expoſant égal à la différence de ceux qu'ils avoient avant la diviſion. Ainſi $a^8 : a^2 = a^{8-2} = a^6$.. $b^{10} : b^7 = b^{10-7} = b^3$.......... $c^{m+n} : c^n = c^{m+n-n} = c^m$.

Cela posé, reprenons la division de $a^3 : a^5$. On écrira, suivant la régle précédente, $a^3 : a^5 = a^{3-5} = a^{-2}$. (On prononce a élevé à la puissance -2, ou bien, pour abréger, a puissance -2). Voilà donc des puissances négatives introduites dans le calcul par une suite de principes & d'exemples qui ne souffrent aucune difficulté. Mais nous avons trouvé que $a^3 : a^5 = \frac{a^3}{a^5} = \frac{a}{a^3} = \frac{1}{a^2}$. Donc la quantité a élevée à la puissance négative -2, n'est autre chose que l'unité divisée par cette même quantité a élevée à la puissance positive 2.

Et comme au lieu des exposans 3 & 5, on peut en substituer une infinité d'autres, tels que leur différence soit également négative, il est évident que a^{-m} peut représenter en général toutes les puissances négatives d'une quantité

quelconque. Or $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$. Donc (& cette régle eſt d'un grand uſage), *toutes les fois qu'une quantité a un expoſant négatif, elle équivaut à l'unité diviſée par cette même quantité, affectée du même expoſant, mais poſitif.*

Soit maintenant la quantité $c^m : c^n$, on écrira pour quotient c^{m-n}. Or il peut arriver, 1°. que m ſoit plus grand que n.... 2°. que $m = n$.... 3°. que m ſoit plus petit que n..... 4°. que $m - n$ donne un réſultat fractionnaire, poſitif ou négatif.

Dans le premier cas, la quantité c doit être élevée à une puiſſance poſitive, marquée par le reſte de m, quand on en a ſouſtrait n.

Dans le ſecond cas, l'expoſant $m - n$ ſe réduit à 0; réſultat qui paroît au moins ſingulier, la première fois qu'on le trouve. Ce réſultat en effet indique

la *puissance* zéro de c, & il semble que la puissance o d'une quantité quelconque, doit être o. Elle équivaut pourtant à l'unité ; car $a^0 = a^{m-m}$. Or

$$a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = 1.$$

Donc une quantité quelconque élevée à la puissance o, *est toujours égale à l'unité.*

Ainsi $a^0 = b^0 = (cd)^0 = (p+q)^0 = (\frac{1}{2})^0 = \left(\frac{b}{p}\right)^0 = 1.$

Dans le troisième cas, m étant plus petit que n (ce qui s'exprime quelquefois ainsi, $m < n$; & pour exprimer que m est plus grand que n, on écrit $m > n$), la différence des deux exposans est négative. Par exemple, si $n = 2m$, on aura $a^m : a^n = a^m : a^{2m} = a^{m-2m} = a^{-m}$. Or $\frac{a^m}{a^{2m}} = \frac{1}{a^m}$.

Donc encore une fois, *toute quan-*

tité affectée d'un exposant négatif, n'est autre chose que l'unité divisée par la puissance égale, mais positive de cette quantité.

Ainsi $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ .....$(bc)^{-p} = \frac{1}{(bc)^p}$.... $bc^{-p} = b \times c^{-p} =$.... $b \times \frac{1}{c^p} = \frac{b}{c^p}$..... $4^{-1} = \frac{1}{4}$.... $bs^{-m}a^{-r} = \frac{b}{s^m a^r}$............. $a^2 = \frac{1}{a^{-2}}$.....

Il suit de-là que l'on peut faire passer au numérateur toutes les quantités qui sont au dénominateur d'une fraction, & réciproquement, sans altérer la valeur de la fraction. Il ne faut pour cela que changer les signes de leurs exposans.

EXEMPLE. $\frac{1}{a} = a^{-1}$....$\frac{c}{f} = cf^{-1} =$

$cf^{-1} = \frac{f^{-1}}{c^{-1}}$, parce que $c = \frac{1}{c^{-1}}$.....de même $\frac{mn}{p^2 q^3} = \ldots$

$mnp^{-2}q^{-3} = \frac{p^{-2}q^{-3}}{(mn)^{-1}} = \ldots$

$\frac{1}{(mn)^{-1}p^2q^3}$..... $\frac{a}{o^{-5}} = \ldots$

$ao^5 = \frac{o^5}{a^{-1}} = \frac{1}{a^{-1}o^{-5}}$.

Dans le quatrième cas, où $m - n$ ſe réduit à un expoſant fractionnaire, on a toujours une racine à extraire. Pour s'en aſſurer, & diſcerner en même-tems le degré de cette racine, il faut ſe rappeler la manière dont on a formé les puiſſances. Or nous avons dit que pour élever une quantité à ſes diverſes puiſſances, il falloit multiplier ſon expoſant par celui de la puiſſance à laquelle on vouloit l'élever.

Donc, *quand on voudra extraire une racine quelconque d'une quantité donnée, il faudra diviser l'exposant de cette quantité par celui de la racine.*

EXEMPLES. On demande la racine quarrée de b^2?.... On écrira $b^{\frac{2}{2}}$, qui se réduit à b.... On demande la racine quatrième de p^{12}?.... On écrira $p^{\frac{12}{4}} = p^3$.... La racine m de c^{2m}.... est $c^{\frac{2m}{m}} = c^2$.

La division ayant réussi dans tous ces exemples, on est sûr d'avoir exactement les racines demandées. Mais il arrive très-souvent que l'on ne peut diviser sans reste l'exposant de la quantité par celui de la racine; & alors il faut bien, de toute nécessité, se contenter d'une simple indication; ce qui introduit dans le calcul les exposans fractionnaires dont l'usage est si fréquent.

Par exemple, si on demandoit la ra-

cine quarrée de b, il faudroit, suivant la régle précédente, écrire $b^{\frac{1}{2}}$. Ainsi *la puissance $\frac{1}{2}$ d'une quantité quelconque n'est autre chose que la racine quarrée de cette quantité.*

Pour avoir la racine cubique ou troisième de b, il faudroit écrire $b^{\frac{1}{3}}$. Donc *la puissance $\frac{1}{3}$ d'une quantité quelconque, n'est autre chose que la racine cubique de cette quantité.*

Il en est de même pour les puissances $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, &c. &c. qui répondent aux racines quatrième, cinquième, sixième, &c.

En général, *tout exposant fractionnaire annonce une racine à extraire; & le degré de cette racine est toujours égal au dénominateur de la fraction.* Ainsi, $a^{\frac{1}{n}}$ = la racine n de la quantité a... $b^{\frac{m}{n}}$ = la racine n de la quantité b^m.

On a coutume de se servir de la lettre initiale *r* du mot *racine*, pour désigner toute extraction de racine à faire : mais afin que ce *signe radical* se distingue mieux, on a altéré sa forme ordinaire, & on l'écrit ainsi $\sqrt{}$; de manière que pour indiquer la racine quarrée de c, on écrit $\sqrt{c}$. On a donc $\sqrt{c} = c^{\frac{1}{2}}$.

Pour désigner la racine cubique de c, on écrit $\sqrt[3]{c}$. On a donc $\sqrt[3]{c} = c^{\frac{1}{3}}$. Pour désigner la racine quatrième de gf, on écrit $\sqrt[4]{gf} = (gf)^{\frac{1}{4}}$; & ainsi des autres, en affectant le signe radical du chiffre qui marque le degré de la racine.

On excepte le radical quarré, parce que l'on est convenu de prendre pour tel, celui qui n'a point d'exposant. Toutes les fois donc que l'on trouve des expressions de cette forme, $\sqrt{a}$.....

$\sqrt{\left(\frac{bc}{a}\right)} \ldots \sqrt{(a^2 - b^2)}$, c'eſt toujours de la racine quarrée de ces quantités qu'il s'agit. Et même le ſeul nom de *racine* s'applique toujours à la racine quarrée, de ſorte que pour en déſigner une autre, on eſt convenu d'ajouter à ce mot le numéro qui la diſtingue.

Puiſque les expoſans fractionnaires annoncent des ſignes radicaux, on peut donc transformer toutes les *quantités radicales* en puiſſances fractionnaires; ce qui eſt d'une grande utilité, comme on le verra par la ſuite. Cette transformation ſe fait en diviſant par l'expoſant du radical les expoſans de la quantité qui eſt ſous le ſigne.

EXEMPLES. $\sqrt{(c^2 g^4)} = c^{\frac{2}{2}} g^{\frac{4}{2}} = c g^2$. $\sqrt[3]{(b^6 q^9)} = b^{\frac{6}{3}} q^{\frac{9}{3}} = b^2 q^3$ .... $\sqrt[5]{(a b^2 c^3)} = a^{\frac{1}{5}} b^{\frac{2}{5}} c^{\frac{3}{5}}$.

Dans les deux premiers exemples, la

division a réussi ; & toutes les fois que cela arrive, on dit que l'extraction de la racine demandée peut s'effectuer. Ces sortes de racines s'appellent *rationnelles* ou *commensurables*. Mais quand l'exposant du radical n'est point un diviseur exact des exposans soumis au signe, comme cela est arrivé dans le troisième exemple, on dit alors que l'extraction est impraticable, & qu'il n'est pas possible d'obtenir, autrement que par approximation, la racine demandée. On appelle ces racines, des quantités *irrationnelles* ou *incommensurables*. Quelques Auteurs les appellent encore *racines sourdes* ; ces trois mots sont synonymes.

La transformation réciproque des puissances fractionnaires en quantités radicales, n'est pas d'un aussi grand usage, mais elle est tout aussi facile ; elle se fait, ainsi que nous l'avons déjà insinué, en donnant pour exposant au radical,

le dénominateur de la fraction qui marque la puissance, & en soumettant à ce signe la même quantité, élevée à la puissance désignée par le numérateur de la fraction.

EXEMPLES. $(3a)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3a}$.......
$(x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(x^2 - y^2)}$.......
$b^{\frac{3}{2}} = \sqrt{b^3}$.....$c^{\frac{5}{4}}p^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{c^4 p}$.......
$(2p - 3e + 4o)^{\frac{2}{3}} =$..............
$\sqrt[3]{(2p - 3e + 4o)^2}$.

Souvent il arrive que les quantités dont on veut extraire la racine, sont affectées d'un coefficient numérique ; & il faut bien alors savoir la manière de faire subir à toutes sortes de nombres l'extraction convenable. C'est ce que que nous allons enseigner dans les articles suivans.

De l'extraction des racines, & en particulier de la racine quarrée.

L'EXTRACTION des racines eſt l'opération inverſe de la formation des puiſſances. On cherche, par exemple, dans celle-ci le produit d'une quantité par elle-même, pour avoir ſon quarré. Dans l'autre on a le quarré & on cherche la racine.

Elle eſt très-aiſée à trouver dans les quantités algébriques, quand elles ſont commenſurables; & comme nous venons d'indiquer la méthode générale pour toutes les quantités monomes, il ne nous reſte qu'à traiter de l'extraction de la racine des polynomes. Commençons par la racine quarrée.

Soit la quantité $a^2 + 2ax + x^2$ dont on cherche la racine quarrée........ D'abord il eſt évident que ſi cette quantité qui n'a que trois termes eſt un quarré

complet, ſa racine ne peut être qu'un binome.

Il n'eſt pas moins évident enſuite, que le premier de ces termes eſt le quarré de la première partie du binome cherché; que le ſecond terme eſt le double du produit des deux parties de ce même binome, & que le troiſième eſt le quarré de la ſeconde partie.

Je ſuis donc sûr de trouver la première partie du binome, en prenant la racine quarrée de a^2. Or $\sqrt{a^2}=a$; j'écris donc a à la racine, puis je ſouſtrais ſon quarré a^2 de la quantité propoſée. Il me reſte $2ax+xx$.

$$\begin{array}{r|l} a^2+2ax+x^2 & \\ -a^2 \quad\quad\quad\quad & \\ 0\ +2ax+x^2 & a+x\ldots\text{racine.} \\ -2ax-x^2 & 2a\ldots\text{diviſeur.} \\ \hline 0 & \end{array}$$

Mais puiſque $2ax$ doit être le pro-

duit du double de la première partie a de la racine par la ſeconde, il eſt clair que pour connoître cette ſeconde partie il n'y a qu'à diviſer $2ax$ par $2a$. Le quotient x me la fera connoître. Car s'il eſt vrai que $+x$ ſoit le ſecond terme de la racine, ſon produit par $2a$, plus ſon quarré x^2 étant ſouſtrait du reſte que j'avois, il ne doit rien reſter. Or pour avoir tout-à-la-fois ce produit & ce quarré, je multiplie $(2a+x)$ par x; & j'ai $2ax+xx$. Souſtraction faite, il ne reſte rien; d'où je conclus que $a+x$ eſt la racine cherchée.

Dans des cas auſſi ſimples, on voit à la ſeule inſpection de la quantité donnée, ſi elle a une racine quarrée exacte, ou ſi elle n'en a point. Mais ſi on ne le voyoit pas du premier abord, on ne tarderoit pas à le reconnoître, en ordonnant la quantité, & en obſervant les régles ſuivantes.

Si la quantité propoſée eſt un *quarré*

parfait, composé de trois termes, on est sûr qu'elle a un binome pour racine. Si les termes de cette quantité sont tous positifs, ceux de la racine seront tous positifs, ou tous négatifs. On voit bien en effet que la racine quarrée de $a^2 + 2ab + b^2$ est également $a + b$, ou $- a - b$. Mais si le second terme du quarré est négatif, l'un des deux termes de la racine (n'importe lequel) doit être négatif. Car $a - b$ & $- a + b$ servent également de racine à la quantité $a^2 - 2ab + b^2$.

C'est-là l'origine de l'*ambiguité du radical quarré*, lequel est susceptible, comme l'on voit, du signe + & du signe —. Aussi trouve-t-on assez souvent l'occasion de l'affecter de ce double $\pm$, que l'on prononce *plus ou moins*, & qui est toujours sous-entendu, quand on ne l'écrit pas.

La racine de c^2, par exemple, équivaut à $\pm \sqrt{c^2}$, c'est-à-dire, qu'elle

eſt indifféremment $+c$ ou $-c$, ſans que l'on puiſſe ſe décider pour une valeur plutôt que pour une autre, à moins que l'état de la queſtion n'exclue une des deux valeurs, comme cela arrive quelquefois.

Après avoir au moins entrevu la poſſibilité de l'extraction projettée, cherchez la première partie de la racine. Vous la trouverez en diviſant par 2 l'expoſant du premier terme de cette quantité.

Et de ces deux termes, l'un ſera le double du produit des deux parties de la racine totale ; l'autre ſera le quarré de la ſeconde partie de cette racine. Tous deux peuvent également ſervir à faire connoître cette ſeconde partie. Le dernier par la ſimple extraction de ſa racine ; l'autre, en le diviſant par le double de la partie déjà connue. Si on préfere cette diviſion, c'eſt uniquement parce qu'elle eſt toujours appliquable aux quantités numériques.

Le

Le ſecond terme de la quantité étant donc diviſé par le double de la première partie de la racine, vous aurez pour quotient la ſeconde partie, & c'eſt alors que pour la vérifier, vous la multiplierez par le double de la première, plus par elle-même, afin de voir ſi ces deux produits ſouſtraits des deux termes qui reſtoient dans la quantité, donnent zéro pour réſultat. Quand cela arrive, l'opération eſt finie, & on a une racine exacte.

Application. On demande la racine quarrée de $4p^6 + 16p^3q^2 + 16q^4$.

1°. La racine de $4p^6$ eſt $2p^3$.

2°. Le double de $2p^3$ eſt $4p^3$.

3°. Le quotient de $16p^3q^2$ diviſé par $4p^3$, eſt $4q^2$.

4°. $4q^2$ eſt la racine de $16q^4$.

Donc $2p^3 + 4q^2$ eſt la racine demandée.

Voici les détails :

$$\begin{array}{l|l} \quad 4p^6 + 16p^3q^2 + 16q^4 & \text{racine.} \\ -4p^6 & 2p^3 + 4q^2 \\ \hline \quad 0 + 16p^3q^2 + 16q^4 & \text{diviseur.} \\ \quad\quad -16p^3q^2 - 16q^4 & 4p^3. \\ \hline \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

Pour que la racine ſoit un trinome, il faut que la quantité donnée ſoit non-ſeulement un quarré parfait, mais encore qu'elle ſoit compoſée de ſix termes. Il en faudroit dix pour un quadrinome, & ainſi de ſuite. Mais à peine trouve-t-on une fois dans la vie ces ſortes d'extractions à faire, ſur dix termes. Nous nous bornerons donc à un exemple de racine trinome.

Soit $a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2c^3 + 2b^2c^3 + c^6$, dont on cherche la racine quarrée,

$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 -$	racine.
$2a^2c^3 + 2b^2c^3 + c^6,$	$a^2 - b^2 - c^3.$
$- a^4$	1er diviseur.
$o - 2a^2b^2 + b^4,$	$2a^2,$
$+ 2a^2b^2 - b^4,$	2e diviseur.
	$2a^2 - 2b^4.$
$o - 2a^2c^3 + 2b^2c^3 + c^6,$	
$+ 2a^2c^3 - 2b^2c^3 - c^6,$	
o	

Celle du premier terme eſt a^2, dont le quarré a^4 étant ſouſtrait de la quantité donnée, on a pour reſte les cinq autres termes $2a^2b^2 + b^4$ &c....... Le premier terme de la racine eſt donc a^2.

Pour trouver le ſecond, j'abaiſſe $-2a^2b^2 + b^4$, & je diviſe $-2a^2b^2$ par $2a^2$. Le quotient eſt $-b^2$, qui multiplié par $(2a^2 - b^2)$ donne $-2a^2b^2 + b^4$ pour produit. Je ſouſtrais ce produit des deux termes abaiſſés,

& comme la soustraction se fait sans reste, je vois que $a^2 - b^2$ sont les deux premières parties de la racine.

Pour trouver la troisième, j'abaisse les trois derniers termes de la quantité, & je divise les deux premiers par $2a^2 - 2b^2$, quantité double de ce qui est déjà à la racine. Le quotient est $-c^3$, que je multiplie par $(2a^2 - 2b^2 - c^3)$. Soustraction faite, il ne reste rien; donc $a^2 - b^2 - c^3$ est la racine cherchée.

Maintenant, rien ne sera plus facile que d'appliquer aux nombres ces formules algébriques, sur-tout après avoir décomposé le quarré d'un nombre quelconque, comme nous allons y procéder.

On sait que le quarré de 9 est 81. Donc le quarré de $5+4$ doit être aussi 81. Or $5+4$ peut être comparé au binome $a+b$, en faisant $a=5$, & $b=4$. Ainsi on aura $81 = a^2 + 2ab + b^2$; quantité dans laquelle $a^2 =$

$5^2 = 25 \ldots . 2ab = 2.5.4 = 40 \ldots .$
$b^2 = 4^2 = 16.$

$$\begin{aligned} a^2 &= 25 \\ 2ab &= 40 \\ b^2 &= 16 \\ \hline & 81 \end{aligned}$$

Mais comme pareillement $9 = 6 + 3$, ou $7 + 2$, ou $8 + 1$, le même binome, en ſubſtituant ces diverſes valeurs, donneroit toujours 81 pour quarré.

S'il falloit cependant retrouver deux de ces valeurs plutôt que deux autres pour racines, on ſent bien qu'il n'y auroit pas moyen de les reconnoître, à cauſe du mélange que les chiffres auroient ſouffert dans la compoſition de 81 : au lieu que dans les quantités algébriques, rien ne ſe mêle ; tout eſt diſtinct juſqu'à la fin du calcul. Auſſi reconnoît-on mieux la marche qu'il faut ſuivre dans l'extraction de leurs racines.

Le nombre 54 étant aussi décomposé en deux parties, $50+4$, on trouvera, substitution faite, que son quarré est 2916.

$$
\begin{array}{rl}
a^2 = & 2500 \\
2ab = & 400 \\
b^2 = & 16 \\
\hline
 & 2916
\end{array}
$$

Enfin si l'on décompose 523 en $500+20+3$, & que l'on fasse $a=500\ldots b=20\ldots\ldots c=3$, on trouvera que son quarré contient exactement les mêmes parties, que celui de $a+b+c$. Ces parties sont

$$
\begin{array}{rr}
a^2 = & 250000 \\
2ab = & 20000 \\
b^2 = & 400 \\
2ac = & 3000 \\
2bc = & 120 \\
c^2 = & 9 \\
\hline
\end{array}
$$

Donc $(523)^2 = 273529$.

On peut donc élever toutes ſortes de nombres au quarré, ſans les multiplier par eux-mêmes. Il ſuffit de leur appliquer la formule du binome, & d'additionner les termes qui en réſultent.

Encore un exemple.

Quel eſt le quarré de 607 ?

Je ſuppoſe $a = 600 \ldots b = 7$, & je trouve $a^2 = 360000 \ldots 2ab = 8400 \ldots b = 49$; donc $(607)^2 = 368449$.

Après nous être aſſurés que les quarrés des nombres contiennent les mêmes parties que les quarrés des quantités algébriques, nous ne pouvons pas douter que la méthode d'extraction ne ſoit la même, à quelques différences près, que le mélange des chiffres doit exiger. La premiere de ces différences eſt qu'il faut commencer l'opération par la gauche, au lieu que dans l'Algebre on réuſſiroit également des deux côtés.

La ſeconde différence conſiſte à partager le nombre dont on veut extraire

la racine quarrée, en tranches de deux chiffres chacune, en commençant par la droite, ce qui ne laissera dans tous les nombres impairs de chiffres, qu'un seul chiffre pour la dernière tranche.

Ce partage seroit inutile, si les parties des quarrés numériques se présentoient toutes séparées comme celles des quarrés algébriques. Mais ne formant qu'un seul tout, on est obligé de les diviser ainsi, pour savoir de combien de chiffres la racine doit être composée. C'est qu'en élevant au quarré différens nombres, on a reconnu, 1°. qu'un nombre simple ne peut avoir plus de deux chiffres à son quarré; 2°. qu'un nombre composé de deux chiffres n'en sauroit avoir plus de quatre à son quarré, & qu'en général, *le quarré d'un nombre quelconque ne peut avoir tout au plus qu'un nombre de chiffres double de celui dont ce nombre est composé.*

Il doit donc y avoir autant de chiffres

à la racine quarrée d'un nombre, qu'il y a de tranches dans ce nombre. La racine de 1849, par exemple, doit en avoir deux que l'on déterminera de la manière ſuivante.

On cherchera d'abord le plus grand quarré contenu dans 18. C'eſt 16, dont on mettra à l'écart la racine 4. On ſouſtraira enſuite de 18 ce quarré 16 qui repréſente ici a, & on écrira au-deſſous le reſte 2.

A côté de ce reſte, on abaiſſera la tranche ſuivante 49, & on aura 249 pour repréſenter les deux autres termes $2ab+b^2$ de la formule,

18,49	43....racine.
16	8.....diviſeur.
249	
249	
0	

Nous avons donc trouvé $a=4$ dixaines; donc pour trouver le nombre b

d'unités, il n'y aura plus qu'à diviser par 8 = 2 a, la quantité qui tient lieu de 2 ab. Or cette quantité est toujours renfermée dans le reste de la première tranche, joint au premier chiffre de la seconde. C'est donc ici 24 qui doit servir de dividende; ce que l'on peut marquer par un point mis sous le 4, qui est le premier des chiffres abaissés.

Divisant maintenant 24 par 8, le quotient sera 3, qu'il ne faut pas mettre à la racine, sans s'être assuré qu'il a les qualités requises pour y être. On s'en assurera, en le soumettant aux mêmes épreuves que la quantité b, c'est-à-dire, que l'on multipliera ce quotient 3 = b par 8 dixaines = 2 a, jointes à 3 unités, afin de voir si le produit de 83 par 3 peut se soustraire de 249.

Comme ce produit donne le même nombre 249, la soustraction ne laisse point de reste. On est donc sûr alors que 3 est le second chiffre de la racine

cherchée. Et la preuve que 43 eſt vraiment cette racine, c'eſt qu'en élevant 43 au quarré, on retrouve 1849.

Autres exemples. Quelle eſt la racine de 121 ?.... *Réponſe*, 11 ſans reſte.

```
1,21 { 11....racine.
 1   { ——
———  { 2.....diviſeur.
 21
 21
———
  0
```

Quelle eſt la racine de 9999 ?....
Réponſe, 99 avec 198 de reſte.

```
99,99 { 99...racine.
 81   { ——
———   { 18...diviſeur.
1899
1701
————
(198)
```

Quelle eſt la racine de 273529 ?...
Réponſe, 523 ſans reſte. Car d'abord

on voit que cette racine doit avoir trois chiffres. On voit ensuite que le premier doit être un 5, parce que le plus grand quarré contenu dans 27 est 25. On mettra donc 5 à la racine, & on soustraira son quarré de 27. Il restera 2 à côté duquel on abaissera la seconde tranche 35; après quoi mettant un point sous le trois, on divisera 23 par 10. Le quotient sera 2.

Mais avant que de placer ce quotient à la racine, on l'ajoutera à la suite du diviseur 10, & on multipliera 102 par ce quotient. Le produit sera 204 qui peut être soustrait de 235. Le chiffre 2 est donc la seconde partie de la racine demandée : & comme on n'en est sûr qu'après cette épreuve, il ne faudra mettre qu'alors 2 à la racine. Reprenant ensuite le fil de l'opération, on dira :

Le reste de 235, quand on en a ôté 204, est 31, à côté duquel il faut abaisser la troisième tranche 29, le nouveau

dividende sera donc 312, & pour diviseur on aura 104, qui est le double de 52 déjà mis à la racine.

Le quotient sera 3, que l'on vérifiera en multipliant 1043 par 3; & comme le produit 3129 est égal au reste de l'opération, on conclura que 523 est la racine demandée. Voici le calcul :

27,35,29	523....racine.
25	10.....1er div.
235	104....2e div.
204	
3129	
3129	
0	

Enfin, s'il falloit chercher la racine du nombre 4243600; je serois déjà sûr qu'elle doit être composée de quatre chiffres, & que le dernier doit être un zéro, au cas que le nombre proposé soit un quarré parfait. (Car les deux zéros de 100, quarré de 10, répondent au zero de 10. Je ne tarde pas à connoître ces

quatre chiffres au moyen du calcul ſuivant.

4,24,36,00	2060.....racine.
4	4........1er div.
2436	40.......2e div.
2436	
0	

J'opère d'abord comme ci-deſſus pour trouver le premier chiffre de la racine, qui eſt 2. En le doublant, j'ai 4 pour premier diviſeur. Ce diviſeur n'étant pas contenu dans 2, premier chiffre de la tranche abaiſſée, j'écris o au quotient, comme dans la diviſion arithmétique. Après quoi j'abaiſſe la troiſième tranche à côté de la ſeconde, ce qui me donne 243 à diviſer par 40. J'obtiens 6 pour quotient ; & le joignant au diviſeur 40, j'ai 406 à multiplier par le quotient 6, pour éprouver ce quotient. Le produit 2436 peut ſe ſouſtraire ſans reſte des deux tranches réu-

nies : j'écris donc 6 à la racine. Le reste de la somme dont je cherche la racine étant deux zéros, j'en écris un à la racine, qui est 2060.

Comme il est très-rare qu'un nombre pris au hasard soit un quarré parfait, on ne doit pas s'attendre à trouver souvent des racines exactes. Il y a presque toujours un reste après la dernière soustraction. Mais alors si on n'a pas besoin d'une très-grande exactitude, on néglige ce reste, dont il n'est pas possible de tirer une seule unité de plus pour la racine.

Si l'on veut cependant en tenir compte, on calculera des décimales pour la racine, en ajoutant successivement deux zéros à chaque reste, & en continuant l'extraction autant qu'on le jugera à propos.

Après avoir trouvé, par exemple, que 624 est la racine approchée de 389489, & qu'il reste 113, j'ajoute

deux zéros à ce reste ; & regardant 624 comme la première partie d'une racine composée de deux termes, je le double, pour avoir le troisième diviseur 1248.

38,94,89	624,09 &c. racine.
36	
294	12.........1[er] div.
244	124........2[e] div.
5089	1248......3[e] div.
4976	12480.....4[e] div.
1130000	&c. &c &c.
1123281	
6719 &c. &c.	

Le dividende qui lui correspond, est 1130 ; le quotient qui en résulte est 0, que je mets au premier rang des décimales ; parce que ce dividende ne contient pas son diviseur.

J'ajoute deux autres zéros à 11300,

& je prens 113000 pour dividende. Le diviſeur eſt 12480. Le quotient eſt 9.

Avant de l'écrire à la racine, je le place à la ſuite de 12480, & je multiplie 124809 par 9. Le produit 1123281 pouvant être ſouſtrait de 1130000, je mets 9 au ſecond rang des décimales.

S'il falloit encore plus d'exactitude, on continueroit d'ajouter deux zéros chaque fois. Le calcul n'a plus d'autre difficulté que celle de la longueur.

On extrait la racine d'une fraction, en extrayant celle de chacun de ſes termes. Ainſi $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, puiſque $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. De même $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$. Mais quand le numérateur & le dénominateur ne ſont pas des nombres quarrés, on ne fait qu'indiquer l'extraction en mettant le ſigne radical avant la fraction, ou bien on réduit la fraction en décimales, & l'on fait l'extraction de la racine, comme on vient de le pratiquer pour les reſtes des quarrés imparfaits.

Extraction de la racine cube.

Extraire la racine cube d'un nombre, c'eſt trouver un nombre qui, multiplié par ſon quarré, produiſe, ou le nombre même dont on propoſe d'extraire la racine, ou le plus grand cube qui y eſt contenu.

La racine cube des nombres qui ne ſont pas exprimés par plus de trois chiffres, ſe trouve par le moyen de la Table ſuivante.

Nombres	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quarrés	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubes	1	8	27	64	125	216	343	512	729
4es Puissances	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561

Il ne s'agit ici que de l'extraction de la racine cube des nombres exprimés par plus de trois chiffres.

Tout nombre exprimé par plus de trois chiffres, en a néceſſairement plus d'un en ſa racine cube. Car 1000, qui eſt le plus petit des nombres exprimés par plus de trois chiffres, a pour racine cube 10, qui eſt exprimé par deux chiffres. Donc, en général, la racine cube de tout nombre exprimé par plus de trois chiffres, peut être regardée comme compoſée de dixaines & d'unités.

Nous avons vu que le quarré d'un nombre compoſé de dixaines & d'unités, contient le quarré des dixaines, plus le double produit des dixaines par les unités, plus le quarré des unités. Ainſi, pour former le cube du même nombre, il faut multiplier chacune des trois parties dont nous venons de parler, par les dixaines & par les unités ; ce qui donnera évidemment les ſix produits ſuivans :

1°. Le quarré des dixaines multiplié par les dixaines, ou le cube des dixaines.

2°. Le double produit des dixaines & des unités, par les unités ; ou le double produit du quarré des dixaines par les unités.

3°. Le quarré des unités par les dixaines.

4°. Le quarré des dixaines par les unités.

5°. Le double produit des dixaines & des unités, par les unités; ou le double produit du quarré des unités par les dixaines.

6°. Le quarré des unités, par les unités, ou le cube des unités.

Raſſemblons toutes ces parties du cube, & ne faiſons qu'une même ſomme de celles de même eſpèce : nous verrons que le cube d'un nombre composé de dixaines & d'unités, contient *le cube des dixaines ; plus trois fois le quarré des dixaines, multiplié par les unités ;*

plus trois fois le quarré des unités, multiplié par les dixaines; plus le cube des unités. Par exemple, le cube de 24 eſt composé des parties qu'on voit ici.

8... cube des dixaines.
48.. triple du quarré des dixaines par les unités.
96. triple du quarré des unités par les dixaines.
64 cube des unités.

Somme. 13824 cube de 24.

La première partie du cube exprime des mille, & a trois places à ſa droite; la ſeconde des centaines, & a deux places; la troiſième des dixaines, & a une place; la quatrième, des unités, & ne laiſſe point de place à ſa droite. Il eſt clair que par cette manière de former le cube, on ne fait que développer le calcul par lequel on auroit trouvé le nombre 13824, en multipliant

à l'ordinaire 24 par 24, & enſuite le produit réſultant par 24.

PROBLÊME I. *Extraire la racine cube d'un nombre ou du plus grand cube qui y eſt contenu, ſi ce nombre n'eſt pas un cube parfait?*

Opérons ſur des exemples pour plus de clarté.

EXEMPLE I. *Extraire la racine cube de 34567, ou du plus grand cube contenu dans ce nombre?*

Cube ſuppoſé	34 | 567	32 rac. cube.
	27	27
	7567	
	5768	
	1799	

Le nombre 34567 étant compoſé de plus de trois chiffres, ſa racine cube en a néceſſairement plus d'un; elle a donc des dixaines & des unités: & le nombre propoſé contient le cu[illegible]

dixaines de la racine; plus trois fois le quarré des dixaines, multiplié par les unités, plus trois fois le quarré des unités, multiplié par les dixaines; plus enfin le cube des unités. Pour avoir la partie du nombre qui contient le cube des dixaines de la racine, je sépare par une petite barre verticale, les trois derniers chiffres, & je vois que le cube des dixaines est contenu dans 34.

Celà posé suivant la table, le plus grand cube contenu dans 34 est 27, dont la racine cube est 3, que j'écris après le crochet, & au-dessus de la barre qui répond au milieu de ce crochet. Retranchant le cube 27 de 34, il reste 7.

A côté de 7, j'abaisse la tranche 567, & j'ai le nombre 7567, lequel doit contenir le triple du quarré des dixaines 3 que nous venons de trouver, multiplié par les unités que nous cherchons; plus le triple de ces mêmes dixaines, multiplié

multiplié par le quarré des unités ; plus le cube des unités. Or le triple du quarré des dixaines, multiplié par les unités, doit avoir deux places à sa droite ; ce produit est donc contenu dans 75. Ainsi, pour avoir les unités, je divise 75 par 27 $= 3 \times 3 \times 3$, triple du quarré des dixaines ; il vient au quotient 2, que j'écris à la suite des dixaines 3. La racine cube du nombre proposé, ou du moins du plus grand cube contenu dans ce nombre, est donc 32, supposé que le chiffre 2, écrit à la racine, ne soit pas trop grand.

Pour éprouver ce chiffre, je fais à part les trois produits qui doivent se trouver dans le nombre 7567, c'est-à-dire, le triple du quarré des dixaines 3 ou de 30, par les unités 2, qui est 5400 ; le triple du quarré des unités par les dixaines, qui est $3 \times 2 \times 2 \times 30 = 360$; enfin le cube des unités, qui est 8. J'ajoute ensemble ces trois

produits; & comme leur somme 5768 est moindre que 7567, je conclus que le chiffre 2 est bon; & en retranchant 5768 de 7567, je vois que le nombre proposé 34567 surpasse le cube 32 de 1799.

Lorsqu'on a eu trouvé la racine 32, on auroit pu la cuber; & en retranchant son cube 32768 de 34567, on auroit trouvé également le reste 1799. Mais il y a un petit avantage dans la pratique, à faire à part les trois produits dont nous avons parlé. On voit, par leur moyen, sans beaucoup de tentatives, si le chiffre des unités de la racine, tel que la division le donne, n'est pas trop grand. En cas qu'il le fût, on le diminueroit d'une unité, jusqu'à ce qu'on en trouvât un qui fût convenable.

EXEMPLE II. *Extraire la racine cube du nombre 94897584, ou du plus grand cube qui y est contenu?*

L'opération eſt indiquée ici ; expoſons-en le procédé par parties.

Cube ſupp.. 94 | 897 | 584	456 rac. c.
64	48
30897	
27125	6687
3772584	
3693816	
78768	

I. Le nombre 94897584 étant exprimé par plus de trois chiffres, ſa racine cube en a plus d'un, & contient par conſéquent des dixaines qui peuvent elles-mêmes être exprimées par plus d'un chiffre, & des unités qui ſont toujours exprimées par un ſeul chiffre. Séparons par une petite barre verticale, les trois derniers chiffres vers la droite; & nous ſerons sûrs que le cube des dixaines de la racine eſt contenu dans le

nombre 94897, qui reſte à gauche. Opérons ſur ce nombre, comme s'il exiſtoit ſeul, & faiſons abſtraction pour un moment de la tranche 584.

II. Comme le nombre 94897 eſt encore exprimé par plus de trois chiffres, ſa racine en a plus d'un, & contient des dixaines & des unités. Séparons vers la droite les trois derniers chiffres; il nous reſtera à gauche le nombre 94, qui contient le cube des dixaines de la racine du nombre partiel 94897. On continueroit le même partage en tranches de trois chiffres, en allant toujours de droite à gauche, ſi le nombre dont on propoſe d'extraire la racine cube, avoit un plus grand nombre de caractères.

Suivant la table, le plus grand cube contenu dans le nombre 94, eſt 64, dont la racine eſt 4, que j'écris à la droite du crochet. Je retranche le cube 64 de 94; & à côté du reſte 30, j'abaiſſe

la tranche 894. Par-là j'ai le nombre 30894, lequel doit contenir le triple du quarré des dixaines 4, multiplié par les unités inconnues, plus le triple du quarré des unités par les dixaines, plus le cube des unités. Le premier de ces trois produits doit avoir deux rangs de chiffres à sa droite, & se trouve par conséquent dans le nombre 308. Ainsi, pour avoir les unités de la racine cube du nombre 94897, je divise 308 par 48, triple du quarré des dixaines 4; le quotient est 6. Mais en faisant les trois produits que je viens d'indiquer, je trouve que leur somme surpasse 30897. D'où je conclus que le chiffre 6 est trop grand pour pouvoir être mis à la racine, j'éprouve le nombre 5, & je vois qu'il est bon; car le triple du quarré des dixaines par 5, est 24000; le triple du quarré des unités, par les dixaines, est 3000; le cube des unités est 125; la somme de ces trois nombres

eſt 27125, qui eſt moindre que 30897. Je retranche 27125 de 30897, il reſte 3772. D'où il ſuit que le nombre 94897 ſurpaſſe le cube de 45 de 3772.

III. Maintenant je reprens la dernière tranche 584, qu'on avoit d'abord miſe à l'écart; je l'abaiſſe à côté de 3772, & j'ai le nombre 3772584. En conſidérant 45 comme les dixaines de la racine du nombre total 94897584, le nombre 3772584 doit contenir le triple du quarré de ces dixaines, par les unités qu'on cherche; plus le triple du quarré des unités, par les mêmes dixaines; plus enfin le cube des unités. Le premier produit doit avoir deux rangs de chiffres à ſa droite; il eſt donc contenu dans 37725. Diviſant ce nombre par 6075, triple du quarré des dixaines 45, il viendra au quotient 6. Je fais le produit de 6075 par 6, qui eſt 3645000; plus le produit 45 par 108, triple du quarré de 6, qui eſt 48600; enfin le

cube de 6, qui eſt 216. J'ajoute enſemble ces trois nombres ; la ſomme eſt 3693816, qui étant retranchée de 3772584, donne 78768 pour reſte. L'opération eſt achevée. On voit que 456 eſt la racine du plus grand cube contenu dans le nombre 94897584, & que ce même nombre ſurpaſſe le cube de 456 de 78768.

SCHOLIE I. Lorſqu'un nombre n'eſt pas un cube parfait, & qu'on veut approcher de ſa racine cube par le moyen des parties décimales, il faut mettre à ſa droite une virgule, & après la virgule trois fois autant de zeros qu'on veut avoir de chiffres décimaux à la racine ; tirer enſuite la racine cube comme s'il n'y avoit pas de virgule ; &, quand elle eſt trouvée, y ſéparer vers la droite, par une virgule un nombre de chiffres décimaux, égal au tiers du nombre des zéros qui accompagnent la virgule dans le cube. Il y a donc

ainſi trois fois plus de parties décimales au cube qu'à la racine cube. En effet, le cube d'un nombre qui contient des dixièmes a trois figures décimales, puiſque les trois facteurs de ce cube ont chacun une figure décimale; le cube d'un nombre qui contient deux figures décimales, doit avoir ſix chiffres décimaux, puiſque chaque facteur de ce cube a deux figures décimales; ainſi de ſuite.

Exemple. *Extraire la racine cube de 57, qui n'eſt pas un cube parfait, & faire en ſorte qu'elle ne diffère pas de la vraie racine, d'un millième?*

Puiſque la racine cube cherchée doit contenir des millièmes, & par conſéquent trois figures décimales, le cube doit avoir neuf figures décimales. Ainſi, au lieu de 57, j'écris 57,000000000, qui eſt au fond la même choſe. Enſuite ſupprimant la virgule, j'extrais par les régles précédentes la racine cube du

nombre 57000000000 ; elle eſt 3848, à moins d'une unité près. Mais, comme 57000000000 eſt 1000000000 fois plus grand que 57, le nombre 3848 eſt 100 fois plus grand que la racine cube de 57. Il faut donc le rendre 1000 fois plus petit ; c'eſt ce qu'on fera en écrivant 3,848, qui ne diffère pas de la racine cube de 57 d'un millième.

SCHOLIE II. Si le nombre dont on propoſe de trouver la racine cube approchée, contenoit déjà des chiffres décimaux, on ne mettroit à ſa droite qu'un nombre de zéros, ſuffiſant pour avoir au cube trois fois autant de chiffres décimaux qu'on veut en avoir à la racine. S'il s'agit, par exemple, d'extraire la racine cube de 57,3, à moins d'un millième près, on ne mettra que huit zéros à la ſuite de ce nombre. Enſuite on tirera la racine cube 57300000000 ; elle eſt 3855, à moins d'une unité près. Séparant trois chiffres vers la droite par

une virgule, on aura, à moins d'un millième près, 3,855 pour la racine cube du nombre proposé 57.3.

SCHOLIE III. S'il falloit extraire la racine cube d'un nombre tel que 0,045, qui ne contient que des parties décimales, & qu'on demandât cette racine à moins d'un centième près, on mettroit trois zéros à la suite du nombre proposé ; & on commenceroit par tirer la racine cube de 45000 ; elle est 35, à moins d'une unité près. Séparant dans ce nombre 35 deux chiffres vers la droite par une virgule, on aura, à moins d'un centième près, 0,35 pour la racine cube du nombre proposé 0,045.

Extraction des racines cubes des fractions.

Il suit des principes sur la multiplication & la nature des fractions, que le cube des fractions est égal au cube du numérateur divisé par le cube du

dénominateur. Donc réciproquement la racine cube d'une fraction eſt la racine cube du numérateur, diviſée par la racine cube du dénominateur. Par exemple, la racine cube de $\frac{27}{64}$ eſt $\frac{3}{4}$; celle de $\frac{343}{729}$ eſt $\frac{7}{9}$.

A l'imitation de ce que nous avons dit plus haut au ſujet de la racine quarrée des fractions, diſtinguons de même deux cas pour les racines cubes des fractions; l'un où le dénominateur eſt un cube parfait, l'autre où il n'en eſt pas un.

Ier Cas. *Tirer la racine cube d'une fraction, lorſque le dénominateur eſt un cube parfait?*

Il faut tirer la racine cube exacte ou approchée du numérateur, & celle du dénominateur. La fraction qui aura pour numérateur la première racine, & pour dénominateur la ſeconde, ſera la racine demandée. Soit, par exemple, la fraction $\frac{458}{512}$, dont il s'agit d'extraire la

racine cube. Je prens la racine 7 de 343, qui eſt le plus grand cube contenu dans le numérateur 458, & la racine exacte 8 du dénominateur 512; je forme la fraction $\frac{7}{8}$, qui n'eſt pas la racine exacte de $\frac{458}{512}$, mais qui n'en diffère pas de $\frac{1}{8}$, c'eſt-à-dire, d'une unité fractionnaire de même dénomination qu'elle.

On peut approcher auſſi près qu'on voudra de la vraie racine du numérateur, par le moyen des parties décimales. Ainſi, tirant la racine cube de 458, à moins d'un millième près, on aura $\frac{7,708}{8}$ pour la racine approchée de $\frac{458}{512}$.

IIe Cas. *Tirer la racine cube d'une fraction, lorſque le dénominateur n'eſt pas un cube parfait?*

Multipliez le numérateur & le dénominateur, par le quarré du dénominateur, vous ne changerez pas la valeur de

de la fraction, & vous en aurez un autre dont le dénominateur eſt un cube parfait; ce qui revient au cas précédent. Soit, par exemple, la fraction $\frac{5}{9}$ dont on demande la racine cube, & dont le dénominateur n'eſt pas un cube parfait; je multiplie numérateur & dénominateur par 81, quarré de 9; & j'ai la fraction $\frac{405}{729}$. Prenant la racine cube approchée 7 du numérateur, & la racine exacte 9 du dénominateur, je forme la fraction $\frac{7}{9}$, qui ne differe pas de $\frac{1}{9}$ de la vraie racine cube de $\frac{5}{9}$.

On approchera davantage, ſi l'on veut de la vraie racine, en employant les parties décimales, comme dans le cas précédent.

SCHOLIE I. Si on propoſoit d'extraire la racine cube d'un nombre compoſé d'un entier & d'une fraction, on commenceroit par réduire l'entier en une fraction de même dénominateur que celle dont il eſt accompagné. Enſuite, après

avoir ajouté enſemble ces deux fractions, on tireroit la racine cube de la ſomme, comme on vient de l'expliquer. Par exemple, qu'il s'agiſſe de tirer la racine cube du nombre $4\frac{2}{9}$: je réduis l'entier 4 en une fraction qui ait 9 pour dénominateur. Par ce moyen, le nombre $4\frac{2}{9}$ devient $\frac{36}{9}$ plus $\frac{2}{9}$, c'eſt-à-dire, $\frac{38}{9}$. La queſtion eſt donc réduite à tirer la racine cube de $\frac{38}{9}$; ce qui ſe rapporte à l'article précédent.

SCHOLIE II. Quand un nombre entier n'eſt pas un cube parfait, & qu'on veut avoir ſa racine cube à moins d'une unité fractionnaire *donnée* près, il faut convertir ce nombre en une fraction qui ait pour dénominateur le cube du nombre qui eſt le dénominateur de l'unité fractionnaire donnée. Par ce moyen, l'opération eſt réduite au premier cas. Soit, par exemple, le nombre 3, qui n'eſt pas un cube parfait, & dont on veut avoir la racine cube, à moins de $\frac{1}{15}$

près; je convertis 3 en une fraction qui ait le cube de 15 pour dénominateur. Cette fraction est $\frac{10125}{3375}$, dont la racine approchée est $\frac{21}{15}$ ou $\frac{7}{5}$, qui ne differe pas de $\frac{1}{15}$ de la vraie racine de 3.

SCHOLIE III. Nous avons indiqué ci-dessus le moyen d'approcher, en parties décimales, de la racine cube des fractions dont les deux termes ne sont pas des cubes parfaits. Voici une autre manière, plus simple dans la pratique, pour parvenir au même but.

Divisez le numérateur par le dénominateur, & poussez l'opération, en parties décimales, jusqu'à ce que vous ayez au quotient trois fois autant de chiffres décimaux que vous voulez en avoir à la racine. Tirez la racine cube de ce quotient, comme s'il n'avoit pas de parties décimales; & quand vous l'aurez trouvée, séparez-y vers la droite un nombre de chiffres décimaux égal au tiers de celui des chiffres décimaux du

cube. Ainsi, par exemple, ayant la fraction $\frac{5}{9}$ dont on demande la racine cube avec trois figures décimales, je l'écris ainsi, $\frac{5,000000000}{9}$; & en effectuant la division, elle devient 0,555555555, dont la racine cube approchée est 0,822.

Extraction des racines cubes des quantités algébriques.

PROBLÊME. *Extraire la racine cube d'un polynome quelconque, entier ou fractionnaire?*

Il s'agit seulement de savoir extraire la racine cube d'un polynome entier, puisqu'on aura celle d'une fraction, en divisant la racine du numérateur par la racine du dénominateur. Or on tirera dans tous les cas la racine cube d'un polynome entier, comme dans les exemples suivans.

EXEMPLE I. *Extraire la racine cube du polynome* $27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3$?

J'ordonne cette quantité par rapport à la lettre a; on voit ici le résultat de l'opération :

Cube ſuppoſé.	racine.
$27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3$	$3a - 2b$
$-27a^3$	$27a^2$
1er reſte $-54a^2b + 36ab^2 - 8b^3$,	
$+54a^2b - 36ab^2 + 8b^3$,	
3e reſte 0	

Développons tout au long le procédé de l'opération indiquée.

1°. J'extrais la racine cube du premier terme $27a^3$; elle eſt $3a$ que j'écris. Enſuite après avoir formé le cube de cette partie, & après l'avoir placé avec un ſigne contraire, ſous le polynome propoſé, je fais la réduction ;

ce qui me donne pour premier reste, $-54a^2b+36ab^2-8b^3$.

2°. Je fais le quarré de la partie $3a$; & je le triple, ce qui me donne $27a^2$, quantité par laquelle je divise le premier terme $-54a^2b$ du premier reste; il vient au quotient $-2b$, que j'écris à la racine. Ensuite je fais premièrement le produit de $27a^2$ par $-2b$; il est $-54a^2b$: secondement, le produit du triple du quarré de $-2b$ par $3a$; il est $+36ab^2$: troisièmement, le cube de $-2b$; il est $-8b^3$. Puis, ayant écrit la somme de ces trois produits, avec des signes contraires, sous le premier reste, je fais la réduction, & il ne reste rien. D'où je conclus que la racine cube exacte de la quantité proposée est $3a-2b$.

On ne peut pas mettre ici le double signe $\pm$ au-devant de la racine, comme pour la racine quarrée.

EXEMPLE II. *Extraire la racine cube*

du polynome $27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3 + 27a^2c - 36abc + 12b^2c + 9ac^2 - 6bc^2 + c^3$?

Ayant ordonné ce polynome, par rapport à a, l'opération se fait comme on le voit dans le tableau suivant :

Cube supposé.	racine cube.
$27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3$, $+27a^2c - 36abc + 12b^2c$, $+9ac^2 - 6bc^2 + c^3$,	$3a - 2b + c$
	$27a^2$
	$27a^2 - 36ab + 12b^2$
$-27a^3$	

1er reste
$$\begin{cases} -54a^2b + 36ab^2 - 8b^3, \\ +27a^2c - 36abc + 12b^2c, \\ +9ac^2 - 6bc^2 + c^3, \\ +54a^2b - 36ab^2 + 8b^3, \end{cases}$$

2e reste
$$\begin{cases} +27a^2c - 36abc + 12b^2c, \\ +9ac^2 - 6bc^2 + c^3, \end{cases}$$
$$-27a^2c + 36abc - 12b^2c,$$
$$-9ac^2 + 6bc^2 - c^3,$$

3e reste o

Les deux premiers termes de la racine se trouvent par un calcul qui est exactement le même que celui de l'exemple précédent. Mais, pour épargner tout embarras aux commençans, faisons ici l'opération en entier.

1°. J'extrais la racine cube du premier terme $27a^3$; elle est $3a$, que j'écris. J'en fais le cube, & j'écris ce cube avec un signe contraire, sous le polynome; & la réduction étant faite, j'ai le premier reste écrit ci-dessus.

2°. Je fais le quarré de $3a$, & je le triple; ce qui me donne $27a^2$, quantité par laquelle je divise le premier terme $-54a^2b$ du premier reste; le quotient est $-2b$, que j'écris à la suite de $3a$. Je fais trois produits; savoir, premièrement, celui de $27a^2$ par $-2b$; secondement, celui du triple du quarré de $-2b$ par $3a$; troisièmement, le cube de $-2b$. Ces trois quantités étant ajoutées ensemble, j'écris

la ſomme, avec des ſignes contraires, ſous le premier reſte, & je fais la réduction. De toutes ces opérations, réſulte le ſecond reſte qu'on voit ci-deſſus.

3°. Je conſidère la partie $3a - 2b$, comme ne formant qu'un même tout; j'en fais le quarré, & je le triple; ce qui me donne $27a^2 - 36ab + 12b^2$. Par le premier terme $27a^2$ de cette quantité, je diviſe le premier terme $27a^2c$ du ſecond reſte; le quotient eſt $+c$, que j'écris à la ſuite de la première partie $(3a - 2b)$ de la racine. Enſuite je fais trois produits: ſavoir, premièrement, celui de $27a^2 - 36ab + 12b^2$ par c; ſecondement, celui du triple du quarré de c par $3a - 1b$; troiſièmement, le cube de c. Et après avoir écrit la ſomme de ces trois quantités, avec des ſignes contraires, ſous le ſecond reſte, je fais la réduction, & j'ai o pour reſte. Par conſéquent la racine exacte du polynome propoſé eſt $3a - 2b + c$.

Par tout ce détail, on voit aſſez que l'extraction des racines ſe rapporte à la diviſion, comme la formation des puiſſances ſe rapporte à la multiplication.

On doit voir auſſi que l'Algebre ſimplifie beaucoup les raiſonnemens qu'il faudroit faire pour démontrer par l'Arithmétique ſeule les régles de l'extraction, celle ſur-tout qui preſcrit de diviſer chaque fois par le double de ce qui eſt la racine. Mais ce n'eſt encore-là qu'une foible preuve de la ſupériorité de l'Algebre ſur l'Arithmétique.

Méthodes pour extraire par approximation les racines d'un degré quelconque.

Avant l'invention des logarithmes, on étoit obligé d'extraire les racines des puiſſances numériques par des mé-

thodes ſemblables à celle que nous venons de détailler pour la racine quarrée. On avoit créé une ſemblable méthode pour la racine cubique en décompoſant le cube du binome $a+b$, comme on avoit décompoſé ſon quarré pour extraire la racine quarrée. La facilité d'extraire les racines numériques par le moyen des logarithmes (opération qui ſe fait ſimplement en diviſant le logarithme de la puiſſance numérique donnée, par l'expoſant de cette puiſſance; par 3, par exemple, pour l'extraction de la racine cubique) a fait négliger ces méthodes longues & compliquées. Nous allons développer deux méthodes générales qui donnent par approximation les racines d'un degré quelconque, & dont on pourra faire en particulier l'application à la racine cubique.

Si on demandoit la racine quarrée de $a^2 - x^2$, ou celle du nombre 5, il ſeroit impoſſible par toutes les mé-

thodes connues de les trouver d'une manière rigoureuſe; de ſorte qu'en multipliant ces racines demandées par elles-mêmes, on reproduisit la quantité $a^2 - x^2$, ou le nombre 5. Il faut ſe contenter alors des méthodes d'approximation. Les deux méthodes de ce genre que nous allons enſeigner, ne ſont que des applications diverſes de la belle formule pour élever un binome à une puiſſance quelconque. Sa généralité eſt telle qu'elle s'étend à tous les cas des puiſſances fractionnaires, que l'on ſait n'être autre choſe que des racines à extraire. Nous allons rapporter ici de nouveau cette formule dont nous avons expliqué ci-devant la formation

$$(a+b)^m = a^m + m a^{m-1} b + \ldots\ldots$$

$$\frac{m.m-1}{2} a^{m-2} b^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{m.m-1.m-2}{2.3} a^{m-3} b^3 + \ldots\ldots$$

$$\frac{m.m-1.m-2.m-3}{2.3.4}\,a^{m-4}\,b^{4}\ldots$$
&c.

Première méthode. Soit donc proposé à trouver la racine quarrée approchée de la quantité $a^2 - x^2 \ldots\ldots\ldots$ On comparera cette quantité avec celle du binome $(a+b)^m$, & les parties de la première à celles de la seconde. Pour cela, on supposera que a^2 de la première tient lieu de a dans la seconde, que $-x^2$ tient lieu de b, & que $\frac{1}{2}$ (exposant fractionnaire de la racine quarrée cherchée) $= m$. Puis on substituera ces trois valeurs aux lettres qui les représentent dans la formule, comme il suit,

$$(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = a^{2\times\frac{1}{2}} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left(\tfrac{1}{2}\,a^{2\times(\frac{1}{2}-1)}\right)\times(-x^2)+\ldots\ldots$$
$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{2}-1}{2}\right)\times\left(a^{2\times(\frac{1}{2}-2)}\right)\times\ldots$$

$(-x^2)^2$, &c....... &c....... &c.

En réduisant, on obtient d'abord....

$(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = a - \frac{a^{-1} x^2}{2} - \ldots \frac{a^{-3} x^4}{8} \ldots$ &c. &c. Considérant ensuite que $a^{-1} = \frac{1}{a^1}$, que $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$, on réduit la quantité supérieure à cette dernière forme..............

$(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} \ldots$ &c.

Les racines approchées des nombres qui n'en ont pas d'exactes, se calculent aisément par ces formules. Veut-on, par exemple, avoir la racine quarrée de 5, que l'on voit être plus grande que 2, & plus petite que 3? Alors on fait, comme ci-dessus, les substitutions nécessaires dans la formule, (c'est-à-dire, dans ses trois premiers termes qui suf-

ſent) $a+b=5$, ou $=4+1$; ainſi $a=4$ & $b=1$; enfin $m=\frac{1}{2}$.....
La formule devient par ces ſubſtitutions.........................

$$(4+1)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot 4^{\frac{1}{2}-1} \cdot 1 + \ldots$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{2}-1}{2}\right) \times 4^{\frac{1}{2}-2} \cdot 1^2 \ldots\ldots$$

En réduiſant $(5)^{\frac{1}{2}} = 2 + \frac{4^{-\frac{1}{2}}}{2} - \frac{4^{-\frac{3}{2}}}{8}$ ...... Conſidérant enſuite que $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$, que $4^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(64)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{8}$, on réduit les trois termes à leurs valeurs les plus ſimples, $(5)^{\frac{1}{2}} = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64}$.... &c.

Si l'on n'emploie que les deux pre-

miers termes, la racine approchée de 5 sera $2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$. Mais $(\frac{9}{4})^2=\frac{81}{16}=5+\frac{1}{16}$. Cette racine est donc trop grande.

Si l'on emploie les trois premiers termes, la racine approchée de 5 sera $2+\frac{1}{4}-\frac{1}{64}$, ou $2+\frac{15}{64}$, ou $\frac{143}{64}$. Mais $(\frac{143}{64})^2=\frac{20449}{4096}=5-\frac{31}{4096}$. Cette racine est trop petite, mais elle est plus approchée que la supérieure $2+\frac{1}{4}$, ou $2+\frac{16}{64}$. On voit donc que la racine quarrée approchée de 5 est entre $2+\frac{16}{64}$ & $2+\frac{15}{64}$.

En calculant un plus grand nombre de termes, on resserreroit de plus en plus les limites entre lesquelles est comprise la racine de 5, sans pouvoir jamais parvenir à sa valeur précise; parce que la racine de 5 est une racine *sourde*, ou une quantité *irrationelle*, ou une quantité *incommensurable*, c'est-à-dire, qu'il n'y a aucun nombre entier, ou fractionnaire, qui, multiplié par lui-

même, puiſſe donner 5 pour produit.

Autre exemple. Soit propoſé de trouver la racine de 8..... On peut faire pour cela $8 = 9 - 1$, ou $8 = 4 + 4$. En ſubſtituant ces valeurs dans la formule, on aura pour les deux premiers termes.....$(9 - 1)^{\frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{6} = 2 + \frac{5}{6} = \frac{17}{6}$, pour les trois premiers termes. $(9 - 1)^{\frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{6} - \frac{1}{216} = \frac{611}{216} = 3 - \frac{37}{216}$. Cette ſeconde valeur de la racine eſt plus approchée que la première; car $(\frac{611}{216})^2 = \frac{373321}{46656} = 8 + \frac{73}{46656}$, tandis que $(\frac{17}{6})^2 = \frac{289}{36} = 8 + \frac{1}{36}$.

La transformation de 8 en $4 + 4$ exige au moins trois termes pour avoir une racine approchée qui eſt $= 2 + 1 - \frac{1}{4} = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$. Cette racine étant moins approchée que les deux ſupérieures, nous apprend qu'il eſt avantageux de transformer la quantité numérique dont on demande la racine en

deux parties inégales. Dans ce cas, ainſi que dans le précédent, il faut obſerver, pour la facilité du calcul, de prendre pour première partie une quantité qui ait une racine *rationelle* de la puiſſance donnée. C'eſt pour cela que l'on a transformé 8 tantôt en $9 - 1$, tantôt en $4 + 4$. Cette obſervation eſt applicable à l'extraction des racines de toutes les puiſſances par le moyen de la formule générale.

Application de la même méthode à l'extraction des racines cubiques.

L'extraction des racines cubiques, ſoit algébriques, ſoit numériques, ſe fait aiſément par la même méthode, & en ſuivant les mêmes procédés. Il n'y a d'autre différence que dans les ſubſtitutions de l'expoſant.

Pour avoir la racine de la quantité cubique algébrique $a + x$, on employera la

formule de Newton rapportée ci-dessus, & on fera $x = b$, $m = \frac{1}{3}$. Par les substitutions, la formule deviendra d'abord

$$(a+x)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} + \tfrac{1}{3} a^{\frac{1}{3}-1} x + \ldots\ldots$$

$$\tfrac{1}{3}\left(\frac{\frac{1}{3}-1}{2}\right) a^{\frac{1}{3}-2} x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\tfrac{1}{3}\left(\frac{\frac{1}{3}-1}{2}\right) \times \left(\frac{\frac{1}{3}-2}{3}\right) a^{\frac{1}{3}-3} x^3.$$

Ensuite, en effectuant les multiplications des coefficiens, & les soustractions des exposans...... $(a+x)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} +$ $\frac{1}{3} a^{-\frac{2}{3}} x - \frac{1}{9} a^{-\frac{5}{3}} x^2 + \frac{5}{81} a^{-\frac{8}{3}} x^3$, &c...............................

Enfin, en ôtant les exposans négatifs, & mettant le signe radical.........

$$\sqrt[3]{(a+x)} = \sqrt[3]{a} + \frac{\frac{1}{3} x}{\sqrt[3]{a^2}} - \ldots \frac{\frac{1}{9} x^2}{\sqrt[3]{a^5}} + \frac{\frac{5}{81} x^3}{\sqrt[3]{a^8}} \ldots\ldots \text{\&c.}$$

Si l'on cherche la racine cubique de la quantité algébrique $1 - y^3$, on employera cette dernière formule, & par les substitutions on trouvera.........

$$\sqrt[3]{(1-y^3)} = 1 - \frac{y^3}{3} - \frac{y^6}{9} - \frac{5y^9}{81}......\&c.$$

S'agit-il de la racine cubique d'un nombre, on parvient de même à l'obtenir par le moyen de substitutions convenables. Quelle est, par exemple, la racine cubique de 1331?

Pour la trouver, j'emploie la formule radicale rapportée ci-dessus, je transforme 1331 en 1000 & 331, que je fais égaux à a & à b (le but de cette transformation est d'avoir pour a un cube parfait). Par les substitutions j'obtiens...............................

$$\sqrt[3]{(1000+331)} = \sqrt[3]{1000} + ...$$

$\frac{2}{3}\left(\frac{331}{\sqrt[3]{(1000)^2}}\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{(331)^2}{\sqrt[3]{(1000)^5}}\right)$,
&c. &c.

Si l'on s'arrête aux deux premiers termes, la racine ſera $10+1{,}103=11{,}103$. Cette racine eſt trop grande de 0,103, puiſque la racine exacte de 1331 eſt 11. En employant trois termes, on auroit eu la racine trop foible $10+\frac{2650317}{2700000}$.

Il eſt auſſi facile d'extraire la racine cubique de 100, celle de 125, &c. &c.

Seconde méthode. Halley inſéra dans les *Tranſactions philoſophiques* de 1694, une méthode qui donne les approximations dans la recherche des racines beaucoup plus vîte que la précédente. (On ne doit l'étudier qu'après la connoiſſance de la réſolution des problêmes du ſecond degré.)

Soit propoſé généralement d'extraire par approximation la racine m d'une quantité quelconque $a^m \pm b$.....

On peut ſuppoſer que la racine m demandée eſt repréſentée par la quantité $a+d$; a exprimant ici un nombre entier, & d la fraction décimale qu'il faut ajouter à ce nombre pour avoir la racine cherchée.

Cela poſé, on aura $a+d = \ldots\ldots \sqrt[m]{(a^m \pm b)}$. Donc $(a+d)^m = a^m \pm b$. Donc en employant pour le premier membre de cette équation la formule du binome. . . . . . $a^m + m\,a^{m-1}\,d + \frac{m.m-1}{2}\,a^{m-2}\,d^2 + \ldots\ldots$ &c $= a^m \pm b$. Négligeant, à cauſe de leur peu de valeur, les termes où la fraction d eſt élevée aux puiſſances ſupérieures au quarré, & effaçant dans les deux membres de l'équation la quantité a^m, on aura. . . . .

$$m\,a^{m-1}\,d + \frac{m.m-1}{2}\,a^{m-2}d^2 = \pm b.$$

Diviſant ce reſte par m, on aura. . . =

$a^{m-1}d + \frac{m-1}{2} a^{m-2}d^2 = \pm \frac{b}{m}$.

Multipliant tous les termes par 2, pour ôter la fraction..... $2a^{m-1}d + (m-1)a^{m-2}d^2 = \pm \frac{2b}{m}$. Divisant tout par $(m-1)a^{m-2}$ pour dégager d^2 de son coefficient.........

$$\frac{2a^{m-1}d}{(m-1)a^{m-2}} + d^2 = \pm \ldots\ldots\ldots \frac{2b}{m(m-1)a^{m-2}} \ldots\ldots\ldots\ldots,$$ ou $$\frac{2a^{m-1}d}{(m-1)a^{m-2}} + d^2 = \pm \ldots\ldots \frac{2b}{(mm-m)a^{m-2}} \ldots\ldots$$ Considérant que $\frac{a^{m-1}}{a^{m-2}} = a^1$, on effectue la

division du premier terme; ce qui donne en ordonnant pour d...............

$$d^2 + \frac{2a}{(m-1)} d = \pm \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{2b}{(mm-m)\,a^{m-2}} \ldots$$ complettant le quarré du premier membre.......

$$d^2 + \frac{2a}{m-1} d + \frac{a^2}{(m-1)^2} = \ldots$$

$$\frac{a^2}{(m-1)^2} \pm \frac{2b}{(mm-m)\,a^{m-2}} \ldots$$

Extrayant les racines & transposant pour avoir la valeur de d...............

$$d = \frac{-a}{m-1} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{(m-1)^2} \pm \right.}$$

$$\left. \frac{2b}{(mm-m)\,a^{m-2}}\right) \ldots$$ Ajoutant des deux côtés de l'équation a, pour avoir la valeur entière de la racine $a+d$ demandée.................

$$\sqrt[m]{(a^m \pm b)} =$$

$$\sqrt[m]{(a^m \pm b)} = a + d = \frac{m-2}{m-1} a + \sqrt{\left(\frac{a^2}{(m-1)^2} \pm \frac{2b}{(mm-m)a^{m-2}}\right)}.$$

De cette formule générale........

$$\sqrt[m]{(a^m \pm b)} = \frac{m-2}{m-1} a + \ldots\ldots \sqrt{\left(\frac{a^2}{(m-1)^2} \pm \frac{2b}{(mm-m)a^{m-2}}\right)},$$

omise par Halley, mais développée par M. l'Abbé Marie dans ses Additions aux Elémens de Mathématiques de l'Abbé de la Caille, découlent par de simples substitutions toutes les formules particulières que Halley a insérées dans son Mémoire. Leur principale utilité consiste à donner des approximations que les Tables ordinaires des Logarithmes ne sauroient donner. Voici ces formules :

$$\sqrt[3]{(a^3 \pm b)} = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}aa \pm \frac{b}{3a}\right)},$$

$$\sqrt[4]{(a^4 \pm b)} = \tfrac{2}{3}a + \sqrt{\left(\tfrac{1}{9}aa \pm \frac{b}{6aa}\right)},$$

$$\sqrt[5]{(a^5 \pm b)} = \tfrac{3}{4}a + \sqrt{\left(\tfrac{1}{16}aa \pm \frac{b}{10a^3}\right)},$$

$$\sqrt[6]{(a^6 \pm b)} = \tfrac{4}{5}a + \sqrt{\left(\tfrac{1}{25}aa \pm \frac{b}{15a^4}\right)},$$

&c. . . . . &c. . . . . &c.

Il ſera aiſé de continuer cette ſuite de formules, en obſervant que les coefficiens des termes du ſecond membre forment des ſéries croiſſantes. 1°. Le coefficient fractionnaire de a dans le premier terme a pour numérateur un des nombres de la ſuite arithmétique 1, 2, 3, &c. & pour dénominateur un des nombres de la ſuite arithmétique 2, 3, 4, &c. 2°. Le coefficient fractionnaire de aa (premier terme ſous le radical) ſecond terme du ſecond membre, a pour numé-

rateur l'unité, & pour dénominateur le quarré du dénominateur du premier membre. 3°. Le coefficient fractionnaire de $\pm b$ (second terme sous le radical) troisième du second membre de l'équation, a pour numérateur l'unité, & pour dénominateur les puissances de a, c'est-à-dire, a, a^2, a^3, &c. affectées pour coefficient de la somme des nombres pris dans l'ordre naturel, $3 = 1 + 2$, $6 = 1 + 2 + 3$, $10 = 1 + 2 + 3 + 4$, &c. &c.

Maintenant faisons-en une application, en nous proposant de trouver la racine cinquième de 161900 avec douze décimales.

Je divise par 5 le logarithme de 161900, qui est 5,2092468; j'ai.... 1,0418494, logarithme de 11,012, racine approchée; je fais $11{,}012 = a$; j'élève 11,012 à la cinquième puissance, & j'ai $a^5 = 161931{,}37873202072883 2$, qui excède 161900 de............,

31,378732020728832. Je fais cet excès $=b$, & j'ai $a^5 - b = 161900$; donc par la formule................

$$\sqrt[5]{(a^5 - b)} = \tfrac{3}{4}a + \sqrt{\left(\tfrac{1}{16}aa - \frac{b}{10a^3}\right)},$$

j'ai en substituant les nombres $\sqrt[5]{(a^5 - b)} = 8{,}259 + \ldots\ldots$
$\sqrt{\left(7{,}579009 - \frac{31{,}378732020728832}{13355{,}60753728}\right)} =$
$8{,}259 + \sqrt{(7{,}579009 - \ldots\ldots\ldots\ldots}$
$0{,}002349831828824315932711) = \ldots$
$8{,}259 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\sqrt{(7{,}5766591681711756840672 89)} =$
$8{,}259 + 2{,}752573190339 = \ldots\ldots\ldots$
$11{,}011573190339$, racine cherchée.

Fin du premier Volume.

TABLE.

De l'Algebre proprement dite, page 1

Usages des Suites pour la Division, 49

Remarques générales sur les Regles de l'Algebre, 52

Des Fractions algébriques, 56

De la Formation des Puissances, & de l'extraction des Racines, 72

Théorie des Exposans, 91

De l'extraction des Racines, & en particulier de la Racine quarrée, 104

Extraction de la Racine cube, 126

Extraction des Racines cubes des fractions, 142

Extraction des Racines cubes des quantités algebriques, 148

Méthodes pour extraire par approximation les Racines d'un degré quelconque, 154

Application de la même méthode, à l'extraction des Racines cubiques, 162

Fin de la Table.





